

Correction DS n°6

Exercice 1 : Une jolie suite

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Etudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$

- b) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
- 3) a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .
- b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et précisez la valeur de $f'(0)$.
- 4) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- 5) On pose la fonction :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \cos(x) - \sin(x) \end{cases}$$

- a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

- b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

- 6) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, puis que $\alpha \in]0; 1[$.
- b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

- c) En déduire la convergence de (u_n) .

On cherche à présent un équivalent de la suite $(u_n - \alpha)$ pour avoir une idée de la vitesse de convergence de (u_n) .

- 7) Dans toute la suite on pose :

$$u_0 \in]0; 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$$

- a) Démontrer que $]0; 1[$ est stable par f .
- b) Démontrer qu'il existe une suite (ϵ_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f'(\alpha)v_n + \frac{f''(\alpha)}{2}(v_n)^2 + (v_n)^2\epsilon_n$$

Avec $\epsilon_n \rightarrow 0$.

- 8) a) Démontrer que $f'(\alpha) \neq 0$.
- b) En déduire qu'il existe une suite (ϵ'_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (f'(\alpha))^n v_0 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \epsilon'_i)$$

- b) Dans cette question on admet que :

$$\lim_n \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \epsilon'_i) = K \neq 0$$

Déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.

Remarque : On démontrera dans le chapitre sur les séries numériques la convergence du produit vers K .

- 1) a) On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

On peut le voir comme un taux de variation, ou nous l'avons démontré dans le cours pour démontrer les dérivées de $\sin$ et $\cos$, ou bien $\sin(x) = x + o(x)$ si on fait le $DL_1(0)$ de sinus.

Ainsi on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Donc **f est continue en 0** et comme f est le quotient de deux fonctions continues, f est continue en dehors de 0.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} = f(x) \text{ car } \sin \text{ est impaire}$$

Ainsi on en déduit que f est **paire**.

2) a) On peut le faire de beaucoup de façons !

1^{er} cas : Sur $[1; +\infty[$

On sait que :

$$\forall x \geq 1, |\sin(x)| \leq 1 \leq \underbrace{x}_{=|x|}$$

Ainsi l'inégalité est vraie pour $x \geq 1$.

2^{ième} cas : $x \in [0; 1]$

$$\forall x \in [0; 1], x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } |\sin(x)| = \sin(x) \text{ et } |x| = x$$

De plus on sait que :

$$\forall x \in [0; 1], \forall t \in [0; x], \cos(t) \leq 1$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\underbrace{\int_0^x \cos(t) dt}_{=\sin(x)=|\sin(x)|} \leq \int_0^x 1 dt$$

On en déduit donc que :

$$\sin(x) \leq x$$

On a donc :

$$\forall x \in [0; 1], |\sin(x)| \leq |x|$$

Ainsi on a :

$$\forall x \geq 0, |\sin(x)| \leq |x|$$

3^{ième} cas : $x < 0$

On a :

$$\forall x < 0, -x > 0 \text{ donc } |\sin(-x)| \leq |-x|$$

Par imparité de $\sin$ et parité de $x \mapsto |x|$, on a :

$$\forall x < 0, |\sin(x)| \leq |x|$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$

b) On a d'après la question précédente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, |f(x)| = \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| = \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leq 1$$

De plus on a $f(0) = 1$. Ainsi on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1$$

Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

3) a) On sait que :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

b) f admet un $DL_2(0)$ donc elle admet un $DL_1(0)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4) On a par quotient $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ avec $I = \mathbb{R}^{-*}$ ou $I = \mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

Il reste à voir la limite de $f'(x)$ pour x tendant vers 0. On a :

$$x \cos(x) - \sin(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^6) = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^2)$$

Ainsi on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x + o(x)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$$

Ainsi **f' est continue sur $\mathbb{R}$** et donc **f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$** .

5) a) On pose :

$$h_1: x \mapsto g(x) - \frac{x^2}{2}$$

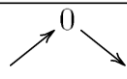
On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_1'(x) = g'(x) - x = -x(\sin(x) + 1)$$

Ainsi $h_1'(x)$ est du signe de $-x$.

De plus on a $h_1(0) = 0$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h_1'(x)$	$+$		$-$
h_1			

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_1(x) \leq 0$$

De même on pose :

$$h_2: x \mapsto g(x) + \frac{x^2}{2}$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_2'(x) = g'(x) + x = -x(\sin(x) - 1)$$

Ainsi $h_2'(x)$ est du signe de x .

De plus on a $h_2(0) = 0$.

On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h_2'(x)$	$-$		$+$
h_2			

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h_2(x) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

b) On a :

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

Ainsi on a d'après la question précédente :

$$\forall x \neq 0, |f'(x)| = \frac{|g(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

De plus on a :

$$f'(0) = 0$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

6) a) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1$$

Ainsi l'équation $f(x) = x$ ne peut admettre des solutions sur $]1; +\infty[\cup]-\infty; 1[$.

De plus on a :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0$$

Par parité $\forall x \in [-1; 0], f(x) \geq 0$. Ainsi $f(x) = x$ ne peut avoir de solution sur $[-1; 0[$.

$f(0) = 1$ donc 0 n'est pas solution et $f(1) = \sin(1) \neq 1$ donc 1 non plus.

Donc si on a des solutions, cela ne peut être que sur $]0; 1[$.

On pose :

$$e_c: x \mapsto f(x) - x$$

On a :

$$\forall x \in]0; 1[, (e_c)'(x) = f'(x) - 1 = -x\sin(x) - 1 < 0$$

Ainsi e_c est strictement décroissante avec $e_c(0) = 1$ et $e_c(1) = \sin(1) - 1 < 0$ et continue.

D'après le théorème de la bijection, $\exists! \alpha \in]0; 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Ainsi **on a unicité des solutions de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.**

b) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis. On a donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

On pose :

$$x = u_n \text{ et } y = \alpha$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

Par récurrence immédiate on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

c) On sait que :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \text{ car } \frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

On en déduit donc que :

$$|u_n - \alpha| \rightarrow 0$$

Donc on a :

$$u_n \rightarrow \alpha$$

7) a) On veut montrer que :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) \in]0; 1[$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

Montrons que :

$$\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0$$

On a :

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) = -x\sin(x) < 0 \text{ sur }]0; 1[$$

De plus :

$$g(0) = 0$$

Ainsi on en déduit que :

$$\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0$$

Ainsi f est décroissante sur $]0; 1[$. De plus on a $f(0) = 1$ et $f(1) = \sin(1) > 0$

Ainsi on a :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) \in]0; 1[$$

b) On utilise la forme de Taylor sur $]0; 1[$ car f y est de classe C^∞ donc de classe C^2 :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(x - \alpha)^2 + (x - \alpha)^2 \epsilon(x) \text{ et } \epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} 0$$

Comme $]0; 1[$ est stable par f et $u_0 \in]0; 1[$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0; 1[$.

En posant $x = u_n \in]0; 1[$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(u_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(u_n - \alpha)^2 + (u_n - \alpha)^2 \epsilon(u_n) \text{ et } \epsilon(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \epsilon(u_n) = \epsilon_n \rightarrow 0$$

Or on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = f(u_n) - f(\alpha)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f'(\alpha)v_n + \frac{f''(\alpha)}{2}(v_n)^2 + (v_n)^2 \epsilon_n$$

8) a) On sait que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

Or nous avons vu précédemment que :

$$\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0$$

Ainsi on a :

$$f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} \neq 0$$

b) On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= f'(\alpha)v_n \left(1 + \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}v_n + v_n \times \epsilon_n \right) \\ &= f'(\alpha)v_n(1 + \epsilon'_n) \end{aligned}$$

Avec

$$\epsilon'_n = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}v_n + v_n \times \epsilon_n$$

On pose l'hypothèse de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n = "v_n = (f'(\alpha))^n v_0 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \epsilon'_i)"$$

Initialisation : $n = 1$

On sait que :

$$v_1 = f'(\alpha)v_0(1 + \epsilon'_0)$$

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

On a alors :

$$v_n = (f'(\alpha))^n v_0 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \epsilon'_i)$$

De plus on sait que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= f'(\alpha)v_n(1 + \epsilon'_n) \\ &= f'(\alpha)(1 + \epsilon'_n)(f'(\alpha))^n v_0 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \epsilon'_i) \\ &= (f'(\alpha))^{n+1} v_0 \prod_{i=0}^n (1 + \epsilon'_i) \end{aligned}$$

Donc la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

c) Il suffit de voir que :

$$\frac{v_n}{K(f'(\alpha))^n v_0} \rightarrow 1 \quad (u_0 \neq \alpha \text{ donc } v_0 \neq 0)$$

On en déduit donc que :

$$v_n \sim K(f'(\alpha))^n v_0$$

Cependant il faut faire attention de ne pas diviser par 0. Pour ce faire on pose :

$$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } v_n = 0\}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$, donc si A est non vide, elle admet un plus petit élément.

On sait que $v_0 \neq 0$ donc si elle admet un plus petit élément n_0 , alors $n_0 \geq 1$.

Or si on a :

$$v_{n_0} = 0 \Rightarrow u_{n_0} = \alpha = f(u_{n_0-1})$$

Par unicité de la solution $f(x) = x$, on en déduit donc que :

$$u_{n_0-1} = \alpha$$

Cela est impossible. Donc $A = \emptyset$. Ainsi on a :

$$v_0 \neq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$$

Problème 1 : Le commutant d'une matrice

Partie A : Quelques propriétés générales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle commutant de M , noté $\mathcal{C}(M)$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec M :

$$\mathcal{C}(M) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA\}$$

1) Déterminer $\mathcal{C}(I_n)$.

1) Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est un sous-espace vectoriel.

2) a) Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est stable par produit :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{C}(M))^2, AB \in \mathcal{C}(M)$$

b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{C}(M), A^k \in \mathcal{C}(M)$$

c) En déduire que :

$$\forall A \in \mathcal{C}(M), \forall P \in \mathbb{R}[X], P(A) \in \mathcal{C}(M)$$

3) Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est stable par passage à l'inverse quand cela est possible. C'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathcal{C}(M) \cap GL_n(\mathbb{R}), A^{-1} \in \mathcal{C}(M)$$

4) Démontrer que $\mathcal{C}(M)$ n'est pas nécessairement stable par le passage à la transposition, c'est-à-dire que :

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } A \in \mathcal{C}(M) \text{ tel que } A^T \notin \mathcal{C}(M)$$

5) Démontrer que :

$$\mathcal{C}(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M \in \{\lambda I_n; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Partie B : Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (Ou une jolie application de la diagonalisation).

Dans cette partie on pose :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

2) a) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D .

b) Montrer que :

$$A \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow P^{-1}AP \in \mathcal{C}(D)$$

Cela nous invite à déterminer $\mathcal{C}(D)$.

3) a) Démontrer que :

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

b) En déduire une base de $\mathcal{C}(M)$.

Partie A : Quelques propriétés générales

1) On sait que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), MI_n = M = I_n M$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{C}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

2) On a :

$$\mathcal{C}(M) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

_ On sait que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M0_n = 0_n = 0_n M$$

Ainsi on a :

$$0_n \in \mathcal{C}(M)$$

_ Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (A, B) \in (\mathcal{C}(M))^2$. On pose $C = \lambda A + \mu B$

On a alors :

$$CM = (\lambda A + \mu B)M = \lambda AM + \mu BM = \lambda MA + \mu MB = M(\lambda A + \mu B)$$

Donc $\mathcal{C}(M)$ est un espace vectoriel.

3) a) $\forall (A, B) \in (\mathcal{C}(M))^2$ on a :

$$(AB)M = A(BM) = A(MB) = (AM)B = (MA)B = MAB$$

Ainsi $AB \in \mathcal{C}(M)$

b) Il suffit de faire une récurrence, c'est immédiat.

c) On pose :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k$$

Ainsi on a :

$$P(A)M = \left(\sum_{k=0}^n p_k A^k \right) M = \sum_{k=0}^n p_k (A^k M) = \sum_{k=0}^n p_k (MA^k) = M \left(\sum_{k=0}^n p_k A^k \right) = MP(A)$$

3) Soit $A \in \mathcal{C}(M) \cap GL_n(\mathbb{R})$. On a alors $A^{-1}A = I_n$

On a :

$$AM = MA \Rightarrow A^{-1}AM = A^{-1}MA \Rightarrow M = A^{-1}MA \Rightarrow MA^{-1} = A^{-1}MAA^{-1} = A^{-1}M$$

Ainsi on a :

$$\forall A \in \mathcal{C}(M) \cap GL_n(\mathbb{R}), A^{-1} \in \mathcal{C}(M)$$

4) On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & (0) & \\ & (0) & 1 & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(M)$$

On a alors :

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & & \\ 2 & 4 & (0) & \\ & (0) & 1 & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M^T M = \begin{pmatrix} * & \mathbf{14} & & \\ * & * & \mathbf{(0)} & \\ & & \mathbf{1} & \\ \mathbf{(0)} & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \neq M M^T = \begin{pmatrix} * & \mathbf{5} & & \\ * & * & \mathbf{(0)} & \\ & & \mathbf{1} & \\ \mathbf{(0)} & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathcal{C}(M)$ n'est pas nécessairement stable par le passage à la transposition.

5) a) On sait que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \lambda I_n A = A \lambda I_n$$

Ainsi on a :

$$\mathcal{C}(\lambda I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

b) Réciproquement on pose :

$$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \mathcal{C}(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On pose :

$$M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

M est donc une matrice qui commute avec tout le monde.

On pose $(k, \ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et $E_{k,\ell} = (e_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice élémentaire. On a donc :

$$E_{k,\ell} \times M = M \times E_{k,\ell}$$

Or on pose :

$$E_{k,\ell} \times M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}, M \times E_{k,\ell} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = \sum_{p=1}^n e_{i,p} m_{p,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ m_{k,j} & \text{si } i = k \end{cases}$$

De même on a :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, b_{i,j} = \sum_{p=1}^n m_{i,p} e_{p,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \ell \\ m_{i,\ell} & \text{si } j = \ell \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$E_{k,\ell} \times M = M \times E_{k,\ell} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, m_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ m_{k,k} & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{C}(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M \in \{\lambda I_n; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Partie B : Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (Ou une jolie application de la diagonalisation).

1) On peut résoudre le système :

$$\begin{cases} -2x + z = a \\ x + y = b \\ x - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a - c \\ y = b + a + c \\ z = -a - 2c \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_3$$

2) a) On a :

$$D = P^{-1} M P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}(M) &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow APDP^{-1} = PDP^{-1}A \\ &\Leftrightarrow P^{-1}APD = DP^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow \mathbf{P^{-1}AP \in \mathcal{C}(D)} \end{aligned}$$

3) a) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$AD = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & b & c \\ -3d & e & f \\ -3g & h & i \end{pmatrix}$$

De même on a :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(D) \Leftrightarrow \begin{cases} -3b = b \\ -3c = c \\ -3d = d \\ -3g = g \end{cases} \Leftrightarrow b = c = d = g = 0$$

On a donc :

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(D) &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{vect}(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\mathcal{C}(M) = \text{vect}(PA_iP^{-1}, 1 \leq i \leq 5)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ B_2 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B_4 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ B_5 &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathcal{C}(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

Il reste à montrer que c'est une base. On résout :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \lambda_k B_k &= 0_3 \Rightarrow \sum_{k=1}^5 \lambda_k P(A_k)P^{-1} = 0_3 \Rightarrow P \left(\sum_{k=1}^5 \lambda_k A_k \right) P^{-1} = 0_3 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^5 \lambda_k A_k &= 0_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1; 5 \rrbracket, \lambda_k = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille est libre. Ainsi :

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

Est une base de $\mathcal{C}(M)$.

Problème 2 : Nombre de combinaison possible pour un code

Une serrure de coffre-fort possède n boutons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 1$). Un n -code consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons. La modélisation est effectuée de la façon suivante : pour tout entier $n \geq 1$, on appelle n -code toute suite ordonnée $(P_1, \dots, P_j)$ de j parties de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $1 \leq j \leq n$. Ces parties sont toutes non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est égale à l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$. On note a_n le nombre de n -codes.

Par exemple :

- Pour $n = 1$, il y a un seul 1-code qui est $(\{1\})$. On a ainsi $a_1 = 1$.
- Pour $n = 2$, il y a trois 2-codes qui sont obtenus avec $(\{1\}, \{2\})$ et $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$. Le premier 2-code consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, le deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, le troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2. On a alors $a_2 = 3$.

Par convention on pose $a_0 = 1$.

Partie A : Une formule de récurrence

1) Démontrer que $a_3 = 13$.

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \binom{n}{k}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=1}^n a_k \binom{n}{k}$$

c) Retrouver à l'aide de cette formule la valeur de a_3 .

Partie B : Une majoration de a_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{a_n}{n!}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_{n-k}}{k!}$$

2) On définit la fonction polynomiale (T_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq T_n(x)$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq \frac{1}{\ln(2)^n}$$

Partie C : Une nouvelle façon d'obtenir les coefficients a_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall x < \ln(2), f(x) = \frac{1}{2 - e^x}$$

1) a) Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty; \ln(2) [$

b) En utilisant le fait que :

$$\forall x < \ln(2), f(x)(2 - e^x) = 1$$

Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, f^n(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0)$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = f^{(n)}(0)$$

d) En déduire alors que :

$$\forall x < \ln(2), f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

Remarque : Ainsi pour déterminer les valeurs de a_n , on peut déterminer les valeurs de b_n , donc on peut chercher les coefficients du $DL_n(0)$ de f .

Partie D : Construction d'une suite de polynômes

1) a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que :}$$

$$\forall x < \ln(2), f^{(n)}(x) = \frac{P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+1}}$$

Dans l'hérédité on établira une relation du type :

$$P_{n+1}(X) = X(a_n P_n(X) + (b_n + c_n X)(P_n)'(X))$$

Où $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. On demande de préciser les valeurs de a_n, b_n et c_n .

b) Donner P_0, P_1, P_2 et P_3 .

c) Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

d) Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \geq 0$.

e) Déterminer le lien entre $P_n(1)$ et le nombre de n -code a_n .

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } P_n(X) = X Q_n(X)$$

b) Etablir une relation entre Q_n, Q_{n+1} et $(Q_n)'$.

c) On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Q_n(0)$$

Déterminer u_n en fonction de n .

d) En déduire que 0 est racine simple pour P_n .

Partie A : Une formule de récurrence

On pose A toutes les combinaisons possibles.

On distingue tous les cas :

1^{er} cas : On a poussé tous les boutons au début :

$$(\{1,2,3\}) \subset A$$

2^{ème} cas : On a poussé deux boutons au départ, puis le dernier en deuxième.

Ainsi on a :

$$(\{1,2\}, \{3\}), (\{1,3\}, \{2\}) \text{ et } (\{2,3\}, \{1\})$$

3^{ème} cas : On a poussé un bouton au départ puis deux boutons en deuxième :

$$(\{1\}, \{2,3\}), (\{2\}, \{1,3\}) \text{ et } (\{3\}, \{1,2\})$$

4^{ème} cas : On a poussé un bouton au départ, puis un autre en deuxième, puis un autre en troisième :

$$(\{1\}, \{2\}, \{3\}), (\{1\}, \{3\}, \{2\}), (\{2\}, \{1\}, \{3\}), (\{2\}, \{3\}, \{1\}), (\{3\}, \{1\}, \{2\}), (\{3\}, \{2\}, \{1\})$$

On a alors :

$$a_3 = 1 + 3 + 3 + 6 = 13$$

2) a) Il suffit de regarder le nombre de boutons que l'on a poussé à la première pression.

Si on a poussé k boutons à la première pression, il nous reste à pousser $n - k$ boutons, ce qui correspond à a_{n-k} .

De plus on a $\binom{n}{k}$ possibilités de pousser k boutons au départ.

La seule particularité tient au fait que si l'on a poussé les n boutons au premier (soit une seule possibilité), il n'y a plus de boutons à pousser ensuite.

Ainsi on a alors :

$$a_n = \binom{n}{1} a_{n-1} + \binom{n}{2} a_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1} a_1 + 1 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a_{n-k} + 1$$

Or on a posé $a_0 = 0$ et on sait que $\binom{n}{n} = 1$.

On a bien :

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \binom{n}{k}$$

b) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Ainsi on a :

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \binom{n}{n-k} = \forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n}{k}$$

3) On a :

$$a_3 = 3a_1 + 3a_2 + a_0 = 3 + 9 + 1 = 13$$

Partie B : Une majoration de a_n

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n a_{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{(n-k)! k!} = \sum_{k=1}^n \frac{b_{n-k}}{k!}$$

2) a) On raisonne par récurrence. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = "\forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq T_n(x)"$$

Initialisation : $n = 0$

On a par convexité :

$$\forall x \geq 0, e^x \geq 1$$

$$T_0(x) = 1$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On pose :

$$h_{n+1}: x \mapsto e^x - T_{n+1}(x)$$

h_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall x \geq 0, (h_{n+1})'(x) = e^x - (T_{n+1})'(x)$$

Or on a :

$$\forall x \geq 0, (T_{n+1})'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k \times x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = T_n(x)$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, (h_{n+1})'(x) = e^x - (T_{n+1})'(x) = e^x - T_n(x)$$

Or on sait d'après l'hypothèse de récurrence que :

$$\forall x \geq 0, e^x - T_n(x) \geq 0$$

On en déduit donc que h_{n+1} est croissante. Or on a : $h_{n+1}(0) = 0$

Ainsi on a :

$$\forall x \geq 0, h_{n+1}(x) \geq 0$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

b) On raisonne par récurrence forte. On pose :

$$\forall n \geq 0, \mathcal{Q}(n) = "b_n \leq \frac{1}{\ln(2)^n}"$$

Initialisation : $n = 0$

On sait que :

$$b_0 = \frac{a_0}{0!} = 1$$

De plus on sait que :

$$\frac{1}{\ln(2)^{1-1}} = 1$$

On a donc $\mathcal{Q}(0)$ vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel ; On suppose $\mathcal{Q}(k)$ vraies pour tout $k \leq n$. On a alors :

$$\forall k \leq n, b_k \leq \frac{1}{\ln(2)^k}$$

On a alors :

$$b_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \times \frac{1}{\ln(2)^{n+1-k}} \leq \frac{1}{\ln(2)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln(2))^k}{k!}$$

Or on a :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(\ln(2))^k}{k!} = T_{n+1}(\ln(2)) - 1 \leq e^{\ln(2)} - 1 \leq 1$$

Ainsi on a :

$$b_{n+1} \leq \frac{1}{\ln(2)^{n+1}}$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence forte.

Partie C : Une nouvelle façon d'obtenir les coefficients a_n

1) a) $x \mapsto 2 - e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty; \ln(2) [$ et ne s'annule pas.

Ainsi **f est de classe $\mathcal{C}^\infty$** sur $] -\infty; \ln(2) [$ **par quotient**.

b) On a :

$$\forall x < \ln(2), f(x)(2 - e^x) = 1$$

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{d^n}{dx^n} (f(x)(2 - e^x)) = \frac{d^n}{dx^n} (1) = 0$$

On utilise ensuite la formule de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{d^n}{dx^n} (f(x)(2 - e^x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)(2 - e^x)^{(k)}$$

Or on sait que :

$$(2 - e^x)^{(k)} = \begin{cases} -e^x & \text{si } k > 0 \\ (2 - e^x) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{d^n}{dx^n} (f(x)(2 - e^x)) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)(2 - e^x)^{(k)} \\ &= f^{(n)}(x)(2 - e^x) - e^x \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 1, f^{(n)}(0)(2 - e^0) - e^0 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(0) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \geq 1, f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(0)$$

c) On sait que :

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \binom{n}{k}$$

Ainsi a_n et $f^{(n)}(0)$ vérifient la même relation de récurrence. Il faut donc vérifier que ce sont les mêmes au départ.
On a :

$$a_0 = 1 \text{ et } f^{(0)}(0) = f(0) = \frac{1}{2 - e^0} = 1$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = f^{(n)}(0)$$

On peut le montrer immédiatement par récurrence forte.

Initialisation : $n = 0$

$$a_0 = 1 = \frac{1}{2 - e^0} = f^{(0)}(0)$$

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose que :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = f^{(k)}(0)$$

On a alors :

$$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1-k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} f^{(n+1-k)}(0) \binom{n+1}{k} = f^{(n+1)}(0)$$

Conclusion : On conclut par le principe de récurrence forte.

d) On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty; \ln(2) [$. Or $0 \in] -\infty; \ln(2) [$. On peut donc appliquer la forme de Taylor :

$$\begin{aligned} \forall x < \ln(2), f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbf{b_k} x^k + o(x^n) \end{aligned}$$

Partie D : Construction d'une suite de polynômes

1) a) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = " \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x < \ln(2), f^{(n)}(x) = \frac{P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+1}} "$$

Initialisation : $n = 0$

On a alors :

$$\forall x < \ln(2), f^{(0)}(x) = \frac{1}{(2 - e^x)} = \frac{P_0(e^x)}{(2 - e^x)^{0+1}} \text{ avec } P_0(X) = 1$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :

$$\forall x < \ln(2), f^{(n)}(x) = \frac{P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+1}} = P_n(e^x)(2 - e^x)^{-(n+1)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x < \ln(2), f^{(n+1)}(x) &= e^x (P_n)'(e^x) (2 - e^x)^{-(n+1)} + (n+1) e^x P_n(e^x) (2 - e^x)^{-(n+2)} \\ &= \frac{e^x (2 - e^x) (P_n)'(e^x) + (n+1) e^x P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(e^x)}{(2 - e^x)^{n+2}} \end{aligned}$$

Avec $P_{n+1}(X) = X(2 - X)(P_n)'(X) - (n+1)XP_n(X)$

Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit que $P_{n+1}(X)$ est un polynôme.

De plus on a :

$$P_{n+1}(X) = X((n+1)P_n(X) + (2 - X)(P_n)'(X))$$

On a donc :

$$\mathbf{\alpha_n = n + 1, \beta_n = 2 \text{ et } \gamma_n = -1}$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

b) On a :

$$P_0(X) = 1$$

$$P_1(X) = X$$

$$P_2(X) = X(2X + (2 - X)) = X^2 + 2X$$

$$P_3(X) = X(3(X^2 + 2X) + (2 - X)(2X + 2)) = X(X^2 + 8X + 4) = X^3 + 8X^2 + 4X$$

c) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R}(n) = " \deg(P_n) = n \text{ et } CD(P_n) = 1 "$$

Initialisation : $n = 0$

$P_0(X) = 1$ donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose vraie $\mathcal{R}(n)$.

On a alors :

$$P_n(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k} X^k$$

On a alors :

$$(P_n)'(X) = nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k \times p_{n,k} X^{k-1}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(X) &= X((n+1)P_n(X) + (2-X)(P_n)'(X)) = X \left((n+1)X^n + (2-X)(nX^{n-1}) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n,k} X^k \right) \\ &= X^{n+1} + \sum_{k=0}^n b_{n,k} X^k \end{aligned}$$

Où $(a_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ et $(b_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ sont des réels qui ne nous intéressent pas.

Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

d) Comme $X|P_n$ on a directement que $P_n(0) = 0$

e) On a :

$$P_n(1) = P_n(e^0) = f^{(n)}(0)(2 - e^0)^{(n+1)} = f^{(n)}(0) = a_n$$

2) a) On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, X|P_n$ et $\deg(P_n) = n$. Ainsi :

$$\forall n \geq 1, \exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } P_n(X) = XQ_n(X)$$

b) On a :

$$P_{n+1}(X) = XQ_{n+1}(X) = X((n+1)P_n(X) + (2-X)(P_n)'(X))$$

Ainsi par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ on a :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(X) &= (n+1)P_n(X) + (2-X)(P_n)'(X) \\ &= (n+1)XQ_n(X) + (2-X)(Q_n(X) + X(Q_n)'(X)) \\ &= (nX + 2)Q_n(X) + (2-X)X(Q_n)'(X) \end{aligned}$$

c) On a :

$$Q_{n+1}(0) = 2Q_n(0)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^{n-1}u_1$$

Or $P_1(X) = X$ donc $Q_1(X) = 1$ donc $u_1 = 1$

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^{n-1}$$

d) On a :

$$\forall n \geq 1, Q_n(0) = u_n = 2^{n-1} \neq 0$$

Donc 0 est racine simple pour P_n .