

DS n°6 - PCSI 2025-2026

Nous rappelons ici que la calculatrice est interdite. Un soin tout particulier sera apporté quant à la rédaction et au soin de la copie. Nous rappelons que les résultats doivent être encadrés ou soulignés, et qu'un trait devra être tiré entre chaque question.

Exercice 1 : Une jolie suite

Dans tout cet exercice on pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Démontrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$$

b) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
- 3) a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f .
b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et précisez la valeur de $f'(0)$.
- 4) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- 5) On pose la fonction :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \cos(x) - \sin(x) \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{x^2}{2} \leq g(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

- 6) Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, puis que $\alpha \in]0; 1[$.
- b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

c) En déduire la convergence de (u_n) .

On cherche à présent un équivalent de la suite $(u_n - \alpha)$ pour avoir une idée de la vitesse de convergence de (u_n) .

- 7) Dans toute la suite on pose :

$$u_0 \in]0; 1[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \alpha$$

- a) Démontrer que $]0; 1[$ est stable par f .
- b) Démontrer qu'il existe une suite (ϵ_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f'(\alpha)v_n + \frac{f''(\alpha)}{2}(v_n)^2 + (v_n)^2\epsilon_n$$

Avec $\epsilon_n \rightarrow 0$.

- 8) a) Démontrer que $f'(\alpha) \neq 0$.
b) En déduire qu'il existe une suite (ϵ'_n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (f'(\alpha))^n v_0 \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \epsilon'_i)$$

b) Dans cette question on admet que :

$$\lim_n \prod_{i=0}^{n-1} (1 + \epsilon'_i) = K \neq 0$$

Déterminer un équivalent de v_n en $+\infty$.

Remarque : On démontrera dans le chapitre sur les séries numériques la convergence du produit vers K .

Problème 1 : Le commutant d'une matrice

Partie A : Quelques propriétés générales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle commutant de M , noté $\mathcal{C}(M)$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec M :

$$\mathcal{C}(M) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA\}$$

- 1) Déterminer $\mathcal{C}(I_n)$.
- 2) Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est un sous-espace vectoriel.
- 3) a) Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est stable par produit :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{C}(M))^2, AB \in \mathcal{C}(M)$$

b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{C}(M), A^k \in \mathcal{C}(M)$$

c) En déduire que :

$$\forall A \in \mathcal{C}(M), \forall P \in \mathbb{R}[X], P(A) \in \mathcal{C}(M)$$

- 4) Montrer que $\mathcal{C}(M)$ est stable par passage à l'inverse quand cela est possible. C'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathcal{C}(M) \cap GL_n(\mathbb{R}), A^{-1} \in \mathcal{C}(M)$$

- 5) Démontrer que $\mathcal{C}(M)$ n'est pas nécessairement stable par le passage à la transposition, c'est-à-dire que :

$$\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } A \in \mathcal{C}(M) \text{ tel que } A^T \notin \mathcal{C}(M)$$

- 6) Démontrer que :

$$\mathcal{C}(M) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M \in \{\lambda I_n; \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Partie B : Un exemple dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (Ou une jolie application de la diagonalisation).

Dans cette partie on pose :

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- 1) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

- 2) a) On pose $D = P^{-1}MP$. Calculer D .

b) Montrer que :

$$A \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow P^{-1}AP \in \mathcal{C}(D)$$

Cela nous invite à déterminer $\mathcal{C}(D)$.

3) a) Démontrer que :

$$\mathcal{C}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & d & e \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \right\}$$

b) En déduire une base de $\mathcal{C}(M)$.

Problème 2 : Nombre de combinaison possible pour un code

Une serrure de coffre-fort possède n boutons numérotés de 1 à n (avec $n \geq 1$). Un n -code consiste à pousser dans un certain ordre tous les boutons. Chaque bouton n'est poussé qu'une seule fois mais il est possible de pousser simultanément plusieurs boutons. La modélisation est effectuée de la façon suivante : pour tout entier $n \geq 1$, on appelle n -code toute suite ordonnée $(P_1, \dots, P_j)$ de j parties de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec $1 \leq j \leq n$. Ces parties sont toutes non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est égale à l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$. On note a_n le nombre de n -codes.

Par exemple :

- Pour $n = 1$, il y a un seul 1-code qui est $(\{1\})$. On a ainsi $a_1 = 1$.
- Pour $n = 2$, il y a trois 2-codes qui sont obtenus avec $(\{1\}, \{2\})$ et $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1, 2\})$. Le premier 2-code consiste à appuyer d'abord sur le bouton 1 puis sur le bouton 2, le deuxième à appuyer d'abord sur le 2 puis sur le 1, le troisième à appuyer simultanément sur les boutons 1 et 2. On a alors $a_2 = 3$.

Par convention on pose $a_0 = 1$.

Partie A : Une formule de récurrence

1) Démontrer que $a_3 = 13$.

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=1}^n a_{n-k} \binom{n}{k}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, a_n = \sum_{k=1}^n a_k \binom{n}{k}$$

c) Retrouver à l'aide de cette formule la valeur de a_3 .

Partie B : Une majoration de a_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{a_n}{n!}$$

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_{n-k}}{k!}$$

2) On définit la fonction polynomiale (T_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, e^x \geq T_n(x)$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq \frac{1}{\ln(2)^n}$$

Partie C : Une nouvelle façon d'obtenir les coefficients a_n

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall x < \ln(2), f(x) = \frac{1}{2 - e^x}$$

1) a) Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty; \ln(2) [$

b) En utilisant le fait que :

$$\forall x < \ln(2), f(x)(2 - e^x) = 1$$

Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(0)$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = f^{(n)}(0)$$

d) En déduire alors que :

$$\forall x < \ln(2), f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

Remarque : Ainsi pour déterminer les valeurs de a_n , on peut déterminer les valeurs de b_n , donc on peut chercher les coefficients du $DL_n(0)$ de f .

Partie D : Construction d'une suite de polynômes

1) a) Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que :}$$

$$\forall x < \ln(2), f^{(n)}(x) = \frac{P_n(e^x)}{(2 - e^x)^{n+1}}$$

Dans l'hérédité on établira une relation du type :

$$P_{n+1}(X) = X(\alpha_n P_n(X) + (\beta_n + \gamma_n X)(P_n)'(X))$$

Où $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$. On demande de préciser les valeurs de α_n, β_n et γ_n .

b) Donner P_0, P_1, P_2 et P_3 .

c) Déterminer le degré de P_n et son coefficient dominant.

d) Calculer $P_n(0)$ pour tout $n \geq 0$.

e) Déterminer le lien entre $P_n(1)$ et le nombre de n -code a_n .

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \geq 1, \exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que } P_n(X) = X Q_n(X)$$

b) Etablir une relation entre Q_n, Q_{n+1} et $(Q_n)'$.

c) On définit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Q_n(0)$$

Déterminer u_n en fonction de n .

d) En déduire que 0 est racine simple pour P_n .