

Programme de colle n°20

16 au 20 mars

Espace vectoriel

- Espaces vectoriels de référence
- Sous-espaces vectoriel
- Sous-espace vectoriel engendré par une partie non vide X d'un espace vectoriel : $\text{vect}(X)$
- Somme de sous-espaces vectoriel, somme directe.

Intégration

- Subdivision d'un segment
- Intégration des fonctions en escalier
- Valeur moyenne
- Propriétés de l'intégrale

Remarque : On demande aux élèves de réviser les IPP et changements de variables vus au premier semestre ! Cependant on mettra l'accent sur les espaces vectoriels !

Questions de cours

Propriété III.b.2 (caractérisation des sommes directes) : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels. On a alors :

$$F \oplus G = F + G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

Exemple III.c.1 : Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \oplus \text{vect}((1, 1, 1))$$

Propriété III.c.3 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, E = \text{vect}(e_1, \dots, e_k) \oplus \text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

Exercices du type

Exercice B.6 : Ecrire les espaces vectoriels suivants sous la forme d'un vect :

$$A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 2z = y - 2t\}$$

$$B = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2) = 0\}$$

$$C = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ géométrique de raison } -3\}$$

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Exercice D.8 : a) Calculer :

$$\forall (k, p) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \int_0^{\pi} \cos(kx) \cos(px) dx = I_{p,k}$$

b) En déduire que $(\cos(kx))_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice E.2 : On pose :

$$E = \{P \in \mathbb{R}_4[X]; P(0) = P(1) = 0\}$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel.

b) Déterminer une base de E .

Application III.b.2 (Intégrale à paramètre) : On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Psi(x) = \int_{-x}^{-3x} e^{-t^2} dt$$

Déterminer les variations de Ψ sur $\mathbb{R}$ et sa limite en $+\infty$.

Exercice B.1 : Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_a^b f(t) dt = 0$$

Montrer que f s'annule sur $[a; b]$.

Exercice B.2 : Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$$

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

b) Montrer qu'il existe $x_1 \in [0; 1]$ tel que $f(x_1) = 0,5$

Exercice B.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue) : Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$$