

Fiche TD 21 : Ev de dimension finie

Partie A : Base d'un ev

Exercice A.1 : a) Montrer que $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,1,1); e_2 = (2,1,1); e_3 = (2,1,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les coordonnées de $e = (9,6,7)$ dans la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer les coordonnées de $e = (a, b, c)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice A.2 : On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; x + t = y - 2z \right\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer une base de F .

Exercice A.3 : Déterminer pour quelles valeurs de t la famille : $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,t); e_2 = (1,1,t); e_3 = (t,0,1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice A.4 : a) On pose $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, -1, i); e_2 = (-1, i, 1); e_3 = (i, 1, -1)\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ forme une base de $\mathbb{C}^3$.

b) Déterminer les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Exercice A.5 : Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{B}_a = (X - a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

b) Soit $0 \leq k \leq n$. Déterminer les coordonnées de $P_k = X^k$ dans cette base.

c) Déterminer les coordonnées de n'importe quel polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

Exercice A.6 : Soit $E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ tel que } \text{Tr}(A) = 0 \right\}$.

a) Déterminer une base de E après avoir montré que E est un espace vectoriel.

b) Déterminer un supplémentaire pour E .

Exercice A.7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ avec $\alpha_i \neq \alpha_j$ dès que $i \neq j$. On définit les polynômes de Lagrange par :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, L_k(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(X - \alpha_i)}{\alpha_k - \alpha_i}$$

1) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Démontrer que :

$$\begin{aligned} &\exists ! (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que :} \\ &\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(k) \end{aligned}$$

Partie B : Dimension

Exercice B.1 : On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2)\}$. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice B.2 : Déterminer la dimension de : $A = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y'' - 2y' + 5y = 0\}$.

Exercice B.3 : On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; -2x + y + 2z = 0 \right\}$. Déterminer une base de F , sa dimension et un supplémentaire.

Exercice B.4 : Même exercice que B.3 avec $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + iy - z = 0 \end{cases} \right\}$

Exercice B.5 : Soient $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; A|P\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(a) = 0\}$.

- Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner une base.
- Déterminer la dimension de F et en donner une base. En déduire une base de G .

Exercice B.6 : Déterminer le rang des familles suivantes :

a) $x_1 = (1, -1, 1), x_2 = (-1, 1, -1), x_3 = (0, 1, 1), x_4 = (1, 0, 2)$

b) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $P_1 = X^2 + X - 3, P_2(X) = X^2 - X - 3, P_3(X) = 2X^2 - X - 6$

d) $f_1: x \mapsto \cos(2x), f_2: x \mapsto 1, f_3: x \mapsto \sin^2(x)$

e) $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice B.7 : On pose :

$$u = (1, 2, 1, 0) \text{ et } v = (0, 1, 2, 1)$$

De plus on pose :

$$F = \text{vect}(u, v) \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = t - z \text{ et } x - z + 2t = 0\}$$

Montrer que $F = G$.

Exercice B.8 : On pose :

$$a = (0, 1, -1, 2), b = (1, 3, 0, 2), c = (2, 1, -3, 4), d = (0, 0, 2, 1), e = (-1, 1, 0, 3)$$

De plus on pose :

$$F = \text{vect}(a, b, c) \text{ et } G = \text{vect}(d, e)$$

Déterminer les dimensions de F , G , $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice B.9 : Soit E un ev de dimension finie et F et G deux sev de E de même dimension.

- Si F et G sont deux sev stricts de E , montrer que $F \cup G \neq E$. En déduire qu'il existe $u \in E \setminus (F \cup G)$.
- En raisonnant par récurrence sur $k = \dim(E) - \dim(F)$, montrer qu'il existe H sev de E tel que :

$$F \oplus H = G \oplus H = E$$

Exercice B.10 : On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(0) = P(1)\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice B.11 : On pose :

$$A = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$$

- Démontrer que A est un espace vectoriel.
- Déterminer sa dimension et une base de A .