

Chapitre 21 : Espace vectoriel de dimension finie

Dans tout ce cours $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -ev.

I) Dimension finie

a) Une famille génératrice finie

Définition : On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire on dit que E est de dimension infinie.

Exemple I.a.1 : Donner deux espaces vectoriels, l'un de dimension finie et l'autre de dimension infinie.

b) Base extraite et incomplète

Propriété I.b.1 (Théorème de la base extraite) : Soit E de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Alors de toute famille finie génératrice de E on peut extraire une base de E .

Exemple I.b.2 : On pose : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

Montrer que la famille suivante est génératrice et en extraire une base de $\mathbb{R}^2$.

Corollaire I.b.3 : Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Propriété I.b.4 (Théorème de la base incomplète) : Soit E un ev de dimension finie. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E , espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{F}$ peut être complété en une base de E :
 $\exists (e_{p+1}, \dots, e_n) \in E^{n-p}, (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E .

Application I.b.5 : Montrer que la famille $(X^3, (X-1)^3, (X-2)^3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Remarque 1 : On verra de nombreuses applications de ce théorème dans le cours sur les applications linéaires.

Remarque 2 : Soit E un ev de dimension finie. Si on possède une famille libre $\mathcal{F}$ d'un espace vectoriel de dimension finie et une famille $\mathcal{G}$ génératrice de E , on peut construire une base de E en complétant $\mathcal{F}$ par des éléments de $\mathcal{G}$.

II) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

a) Toujours le même cardinal

Propriété II.a.1 (Lemme de la famille liée) : Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une base de E de cardinal n . Alors toute famille constituée de $n+1$ éléments est liée.

Propriété II.a.2 (cardinal commun) : Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. On appelle dimension de E et on note $\dim(E)$ le cardinal de chacune de ses bases.

Exemple II.a.3 : Déterminer la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$.

Application II.a.4 : On pose $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$. Déterminer la dimension de F .

Exemple II.a.5 : Démontrer que $\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$.

Application II.a.6 : Déterminer la dimension de $S_n(\mathbb{R})$.

b) Plusieurs théorèmes pratiques !

Propriété II.c.1 : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On a alors :

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$$

Application II.c.2 : Montrer que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$

Propriété II.c.3 : Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors toute famille libre admet au plus n éléments et toute famille génératrice admet au moins n éléments.

Propriété II.c.4 : Soient E un espace vectoriel de dimension n $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$ une famille de E de n éléments. On a alors les équivalences suivantes :

$$\mathcal{B} \text{ est une base} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{B} \text{ est génératrice}$$

Application II.c.5 : On pose :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Application II.c.6 : Soit n un entier naturel. On pose :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_i(X) = \sum_{k=0}^i X^k = 1 + X + \dots + X^i$$

Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Rang d'une famille de vecteurs.

Définition : Soit $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de E, noté rg , la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille, notée $\text{vect}(e_1, \dots, e_p)$:

$$\dim(\text{vect}(e_1, \dots, e_p)) = \text{rg}(e_1, \dots, e_p)$$

Exemple II.c.1 : Déterminer :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Propriété II.c.2 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$. On a alors :

- (1) $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) \leq \min(n, p)$
- (2) La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = p$
- (3) La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice si et seulement si $\text{rg}(e_1, \dots, e_p) = n$.

Application II.c.3 : Déterminer :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

III) Sous-espace d'un espace vectoriel de dimension finie

a) Dimension

Propriété III.a.1 : Soient E un ev de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . On a alors :

(1) F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$

(2) $F = E \Leftrightarrow \dim(F) = \dim(E)$

Application III.a.2 : Montrer que :

$$\dim(\{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(1) = 0\}) = n$$

Vocabulaire :

- Un espace vectoriel a une dimension est appelé une droite vectorielle. Ils sont de la forme $\text{vect}(e)$ avec e non nul.
- Un espace vectoriel a deux dimensions est appelé un plan vectoriel. Ils sont de la forme $\text{vect}(e_1, e_2)$ où
- Si E est de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E) - 1$, on dit que F est un hyperplan de E .

Exemple III.a.3 : Déterminer un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$.

Exemple III.a.4 : Montrer que $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$ est un plan vectoriel.

b) sev supplémentaires

Propriété III.b.1 : Tout sev F d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins un supplémentaire.

Propriété III.b.2 : On a :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

Application III.b.3 : Déterminer $\dim(A_n(\mathbb{R}))$.

Propriété III.b.4 (Formule de Grassman) : Pour tout sev F et G de E ev quelconque. On a :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Remarque : On a en particulier que :

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$$

Propriété III.b.5 : Soient E un ev de dimension finie et F et G deux sev de E . On a :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{O_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Application III.b.6 : Montrer que :

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y + 5z = 0 \right\} \oplus \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Application III.b.7 : Soit E un ev de dimension finie et H un hyperplan de E . Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que :

$$H \oplus \mathbb{K}a = E$$

Application III.b.8 : On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = 0\}$. Démontrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer un supplémentaire de F .