

Correction TD 20

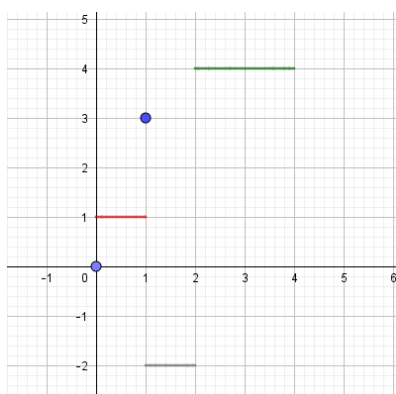
Partie A : Fonction en escalier

Exercice A.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} [0; 4] \rightarrow \{-2; -1; 1; 3; 4\} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } 0 < x < 1 \\ 3 \text{ si } x = 1 \\ -2 \text{ si } 1 < x \leq 2 \\ 4 \text{ si } 2 < x \leq 4 \end{cases} \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f .

2) Calculer $\int_0^4 f(t)dt$



On a :

$$\int_0^4 f(t)dt = 1 \times 1 + (-2) \times 1 + 4 \times 2 = 7$$

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=UXp2ntGBZNE>

Partie B : Propriétés de l'intégrale

Exercice B.1 : Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

Montrer que f s'annule sur $[a; b]$.

On raisonne par contraposée. Si f ne s'annule pas sur $[a; b]$, comme f est continue, elle ne change pas de signe.

1^{er} cas : Si $f(t) < 0 \forall t \in [a; b]$

On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt < 0$$

2^{ième} cas : Si $f(t) > 0 \forall t \in [a; b]$

On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt > 0$$

On en déduit donc par contraposée que :

$$\begin{cases} \int_a^b f(t)dt = 0 \\ f \in \mathcal{C}^0([a; b]) \end{cases} \Rightarrow \exists c \in [a; b], f(c) = 0$$

Exercice B.2 : Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$$

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [0; 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

b) Montrer qu'il existe $x_1 \in [0; 1]$ tel que $f(x_1) = 0,5$

a) On sait que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)dt &= \frac{1}{2} = \int_0^1 t dt \\ \Rightarrow \int_0^1 (f(t) - t)dt &= 0 \end{aligned}$$

Or on sait que $t \mapsto f(t) - t$ est continue. Donc on peut appliquer le résultat de l'exercice précédent :

$$\exists x_0 \in [0; 1], f(x_0) = x_0$$

b) On fait de même avec :

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1}{2} dt \Rightarrow \int_0^1 \left(f(t) - \frac{1}{2}\right) dt = 0$$

Or on sait que $t \mapsto f(t) - 0,5$ est continue. Donc on peut appliquer le résultat de l'exercice précédent :

$$\exists x_1 \in [0; 1], f(x_1) = x_1$$

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=OjBbmNvQoSY>

Exercice B.3 (Lemme de Riemann-Lebesgue) : Soit $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t)dt = 0$$

$f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On sait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Ainsi il existe $(c_1, c_2) \in [0; 1]^2$ tel que :

$$\forall t \in [0; 1], f(c_1) \leq f(t) \leq f(c_2)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^n f(c_1)dt &\leq \int_0^1 t^n f(t)dt \leq \int_0^1 t^n f(c_2)dt \\ \Rightarrow f(c_1) \int_0^1 t^n dt &\leq \int_0^1 t^n f(t)dt \leq f(c_2) \int_0^1 t^n dt \\ \Rightarrow \frac{f(c_1)}{n+1} &\leq \int_0^1 t^n f(t)dt \leq \frac{f(c_2)}{n+1} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{f(c_1)}{n+1} = \lim_n \frac{f(c_2)}{n+1} = 0$$

On conclut d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 t^n f(t) dt = 0$$

Exercice B.4 : Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\exists c \in [a; b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

On raisonne par l'absurde. On suppose que :

$$\forall t \in [a; b], f(t) \neq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Comme f est continue on a deux cas de figure :

1^{er} cas :

$$\forall t \in [a; b], f(t) > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

On a alors :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Absurde.

2^{ième} cas :

$$\forall t \in [a; b], f(t) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

On a alors :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Absurde.

On a donc :

$$\exists c \in [a; b], f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Exercice B.9 : Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

On pose :

$$F: \begin{cases}]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \end{cases}$$

Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

D'après la définition d'une limite on en déduit que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On calcule :

$$\begin{aligned}
|F(x) - \ell| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x \ell dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - \ell) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \ell| dt \\
&\leq \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \ell| dt + \frac{1}{x} \int_A^x |f(t) - \ell| dt \\
&\leq \frac{1}{x} M + \frac{1}{x} \times \epsilon(x - A)
\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} M = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - A}{x} = 1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell$$

Partie C : Calcul de primitive et d'intégrale

Exercice C.1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx$$

On a :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x) dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x(x^2 + 1)^{-3} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{-2}}{-2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{16}$$

Exercice C.2 : Calculer :

$$\int \frac{dt}{it + 1} \text{ et } \int e^t \cos(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dt}{it + 1} \\
&= \int \frac{1 - it}{1 + t^2} dt \\
&= \int \frac{1}{1 + t^2} dt - i \int \frac{t}{1 + t^2} dt \\
&= \arctan(t) - \frac{i}{2} \ln(1 + t^2)
\end{aligned}$$

Exercice C.3 (Centrale PSI) : Démontrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \int_{-1}^1 Q(t) dt = -i \int_0^{\pi} Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

On peut penser au changement de variable $t = e^{i\theta}$ mais cela n'est pas rigoureux à votre niveau.

On pose :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 Q(t) dt &= \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^n a_k X^k dX \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 X^k dX \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (1 - (-1)^{k+1}) \end{aligned}$$

De même on a :

$$\begin{aligned} Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^n a_k e^{(k+1)i\theta} \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \cos((k+1)\theta) + i \sum_{k=0}^n a_k \sin((k+1)\theta) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cos((k+1)\theta) + i \sum_{k=0}^n a_k \sin((k+1)\theta) \right) d\theta \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{\pi} \cos((k+1)\theta) d\theta + i \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{\pi} \sin((k+1)\theta) d\theta \\ &= i \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (1 - (-1)^{k+1}) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \int_{-1}^1 Q(t) dt = -i \int_0^{\pi} Q(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

Exercice C.4 : Pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer :

$$I_{k,p} = \int_0^{\pi} \cos(kt) \cos(pt) dt, I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*), I = \int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln(t)) dt$$

On a :

$$\forall (k, p) \in \mathbb{N}^2, \int_0^{\pi} \cos(kx) \cos(px) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((k+p)x) + \cos((k-p)x) dx$$

1^{er} cas : Si $p = k$ on a alors :

$$I_{p,p} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(2px) + 1 dx = \begin{cases} \pi & \text{si } p = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

2^{ième} cas : Si $p \neq k$ on a alors :

$$\begin{aligned}
 I_{p,k} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((k+p)x) + \cos((k-p)x) dx \\
 &= \frac{1}{2(k+p)} [\sin((k+p)x)]_0^\pi + \frac{1}{2(k-p)} [\sin((k-p)x)]_0^\pi \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(t) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

On a donc :

$$\int_0^1 t^n \ln(t) dt = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$I = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt$$

On effectue le changement de variable $u = \ln(t) \Rightarrow t = e^u$

a) On change les bornes

$$\begin{cases} t = 1 \Rightarrow u = 0 \\ t = e^\pi \Rightarrow u = \pi \end{cases}$$

b) On calcule le dt :

$$t: u \mapsto e^u \in \mathcal{C}^1([0; \pi]) \text{ et } \frac{dt}{du} = e^u \Rightarrow dt = e^u du$$

c) On remplace :

$$I = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt = \int_0^\pi \sin(u) e^u du$$

d) On calcule la nouvelle intégrale

On peut le faire de deux façons.

Méthode 1 : Avec une double intégration par partie

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\pi \sin(u) e^u du = [-\cos(u) e^u]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(u) e^u du \\
 &= e^\pi + 1 + \left([\sin(u) e^u]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(u) e^u du \right) \\
 &= e^\pi + 1 - I
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

Méthode 2 : Avec les complexes

$$I = \int_0^\pi \sin(u) e^u du = \mathcal{J} \left(\int_0^\pi e^{iu} e^u du \right) = \mathcal{J} \left(\left[\frac{e^{(1+i)u}}{1+i} \right]_0^\pi \right) = \mathcal{J} \left(\frac{-e^\pi - 1}{1+i} \right) = (-e^\pi - 1) \mathcal{J} \left(\frac{1}{1+i} \right) = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

Exercice C.5 : Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

On effectue une IPP car f est de classe $\mathcal{C}^1$:

On a donc :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \left[-\frac{f(t) \cos(nt)}{n} \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt$$

On utilise le fait que f soit continue sur un segment $[a; b]$. Donc f est bornée et atteint ses bornes :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq M$$

De même on sait que f' est continue sur le segment $[a; b]$ donc f' est continue et atteint ses bornes :

$$\exists M' \in \mathbb{R}^+, |f'(x)| \leq M'$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| &\leq \int_a^b |f(t) \sin(nt)| dt \\ &\leq \left[\left| \frac{f(t) \cos(nt)}{n} \right| \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t) \cos(nt)| dt \\ &\leq 2 \frac{M}{n} + \frac{2}{n} M' \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_n 2 \frac{M}{n} + \frac{2}{n} M' = 0$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

Exercice C.6 : Calculer :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} \quad ; \quad \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}$$

On effectue un CDV :

On pose :

$$x = \sqrt{t}$$

On a donc :

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

On a donc :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} = \int \frac{2x dx}{x + x^3} = 2 \int \frac{dx}{1 + x^2} = 2 \arctan(x) = 2 \arctan(\sqrt{t})$$

On fait de même on pose : $t = \text{ch}(x)$ si $t > 1, x > 0$

On a donc :

$$dt = \text{sh}(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} &= \int \frac{\text{sh}(x) dx}{\text{ch}(x) \sqrt{\text{ch}^2(x) - 1}} = \int \frac{dx}{\text{ch}(x)} = 2 \arctan(e^x) = 2 \arctan(e^{\text{argch}(t)}) = 2 \arctan(e^{\ln(t + \sqrt{t^2 - 1})}) \\ &\Rightarrow \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}} = 2 \arctan(t + \sqrt{t^2 - 1}) \end{aligned}$$

On a le même résultat si $t < -1$.

Exercice C.7 : 1) Montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$$

2) En déduire :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}$$

On veut montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt$$

On pose :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt$$

On effectue le changement de variable :

$$u = \frac{\pi}{2} - t$$

On a donc :

$$du = -dt$$

Et on a :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = J$$

De plus on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \frac{\pi}{2} = 2I$$

On a donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$$

2) On pose :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t}$$

On pose :

$$t = \sin(u)$$

On a donc :

$$\begin{cases} u = 0 \Rightarrow t = 0 \\ u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$$

De plus $u \mapsto \sin(u) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on a alors :

$$dt = \cos(u) du$$

On a donc :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} + t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\cos(t) + \sin(t)} dt = \frac{\pi}{4}$$

Partie D : Somme de Riemann

Exercice D.1 : Calculer la limite de:

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}; \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}$$

On a :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \Rightarrow \lim_n u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

On a :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}} \Rightarrow \lim_n v_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(2)$$

Exercice D.2 : Calculer la limite de:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}}; \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + 3 \times \frac{k}{n}}$$

On a :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}} \Rightarrow \lim_n u_n = \int_0^1 2^x dx = \int_0^1 e^{x \ln(2)} dx = \frac{1}{\ln(2)} [e^{x \ln(2)}]_0^1 = \frac{1}{\ln(2)}$$

De même on a :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + 3 \times \frac{k}{n}} \Rightarrow \lim_n v_n = \int_0^1 \frac{1}{1+3x} dx = \frac{1}{3} \ln(4)$$

Exercice D.3 : Calculer la limite de:

$$u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}; \quad v_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$$

On est dans le chapitre somme de Riemann et on voit apparaître des produits. On doit donc penser à utiliser le logarithme !

On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln(u_n) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^{2n} k \times \prod_{k=1}^n \frac{1}{n} \times \prod_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^n \frac{k+n}{n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{n+k}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + (2-1) \frac{k}{n} \right) \\
\Rightarrow \lim_n \ln(u_n) &= \frac{1}{2-1} \int_1^2 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^2 = (2 \ln(2) - 2 + 1) = \ln(4) - 1
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = 4e^{-1}$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
v_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \\
\Rightarrow \ln(v_n) &= \ln \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\
\Rightarrow \lim_n \ln(v_n) &= \frac{1}{2-1} \int_1^2 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^2 = (2 \ln(2) - 2 + 1) = \ln(4) - 1
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n u_n = 4e^{-1}$$

Partie E : Fonction définie par une intégrale

Exercice E.1 : Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)^2} dt$$

On sait que :

$$\forall x > 0, \left| \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \right| \leq \int_{-x}^x |\sin(t^2)| dt \leq \int_{-x}^x 1 dt \leq 2|x|$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} 2|x| = 0 \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left| \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \right| &= 0 \\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt &= 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \forall t \in [x, 2x], \frac{1}{\ln^2(2x)} &\leq \frac{1}{\ln^2(t)} \\ \Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln^2(2x)} dt &\leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln^2(t)} dt \\ \Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln^2(t)} dt &\geq \frac{x}{\ln^2(2x)} \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^2(2x)} = +\infty \text{ (croissance comparée)}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln^2(t)} dt = +\infty$$

Exercice E.2 : Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt$$

On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^t \geq 1 + t$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \geq \underbrace{\int_x^{2x} \frac{(1+t)}{t} dt}_{=\ln(2)+x}$$

De plus on sait que :

$$\exists c > 0, \forall t \in]-c; c[, e^t \leq 1 + t + t^2$$

On a donc :

$$\forall x > 0, \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \underbrace{\int_x^{2x} \frac{(1+t+t^2)}{t} dt}_{=\ln(2)+x+\frac{3x^2}{2}}$$

On a donc :

$$\forall x > 0, x + \ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq \ln(2) + x + \frac{3x^2}{2}$$

On conclut d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln(2)$$

On fait de même en 0^- et par continuité de f on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln(2)$$

2) On pose :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

On effectue le changement de variable :

$$u = \frac{1}{x}$$

On a donc :

$$dx = -\frac{du}{u^2}$$

On a donc :

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2x}} \frac{e^{\frac{1}{u}}}{\frac{1}{u^2}} du = - \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2x}} \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u} du$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} - \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2x}} \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u} du = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{u}}}{u} du = \ln(2)$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt = \ln(2)$$

Exercice B.3 : On pose :

$$\forall x > 0, f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

a) Montrer que :

$$\forall x > 1, |f(x)| \leq \frac{2}{x}$$

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Déterminer la limite de f en 0^+ .

d) Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et déterminer $f'(x)$.

On effectue une IPP :

$$\begin{aligned} \forall x > 1, \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt &= \left[\frac{\sin(t)}{t} \right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall x > 1, |f(x)| &= \left| \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} + \int_x^{2x} \left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| dt \\ &\leq \frac{3}{2x} + \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt \\ &\leq \frac{3}{2x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} \\ &\leq \frac{2}{x} \end{aligned}$$

2) On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = 0$$

3) On sait que :

$$\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}[, \cos(t) > 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{4}[, \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt > 0$$

De plus on a :

$$\forall x \in]0; \frac{\pi}{4}[, \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt}_{\ln(2)}$$

De plus on sait que :

$$\forall t > 0, \cos(t) \geq 1 - \frac{t^2}{2}$$

On a donc :

$$\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \geq \underbrace{\int_x^{2x} \frac{1 - \frac{t^2}{2}}{t} dt}_{=\ln(2) - \frac{3x^2}{4}}$$

On en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \ln(2)$$

3) On sait que :

$$t \mapsto \frac{\cos(t)}{t} \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$$

De plus :

$x \mapsto 2x$ et $x \mapsto x$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc :

$$f: x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$$

De plus :

$$\forall x > 0, f'(x) = 2 \frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{\cos(x)}{x} = \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x}$$

Exercice E.4 : On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$$

- Déterminer la parité de f .
- Démontrer que f est dérivable et déterminer $f'(x)$.
- Déterminer les limites de f à ses bornes.

On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2} dt$$

On effectue un CDV :

$$u = -t$$

On a alors :

$$f(-x) = \int_x^{2x} e^{-(-t)^2} (-dt) = - \int_x^{2x} e^{-t^2} dt = -f(x)$$

Donc f est impaire !

b) De la même façon que l'exercice précédent f est dérivable (et même de classe C^1) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

c) On sait que :

$$\forall x > 0, \forall t \in [x; 2x], e^{-4x^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-x^2}$$

On a donc :

$$xe^{-4x^2} \leq \int_x^{2x} e^{-t^2} dt \leq xe^{-x^2}$$

Or on sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0$$

On en déduit donc d'après le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} e^{-t^2} dt = 0$$

Exercice E.5 : On étudie dans ce problème la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

La courbe représentative de F sera notée Γ .

- Déterminer le signe de F sur $]0; +\infty[$.
- Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $]0; +\infty[$.
- Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$. En déduire les variations de F .
- Ecrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2) Montrer que :

$$\forall x > 0, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

3) a) Soit Φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \Phi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

Montrer que Φ est prolongeable par continuité en 0.

b) Montrer que :

$$\forall x > 0, F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \Phi(t) dt$$

c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. Que peut-on en déduire de l'allure de Γ en $+\infty$?

d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0. Que peut-on en déduire de l'allure de Γ au point d'abscisse 0 ?

4) Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

On pose :

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[, I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t) dt$$

a) Calculer $I_k(x)$ pour tout $(k, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[$.

b) Montrer que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

c) En déduire que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; 1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| < I_{2n+2}(x)$$

d) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

e) Donner, en détaillant la méthode utilisée, une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-2} .

5) Tracer l'allure de la courbe Γ .

1) a) On distingue deux cas :

1^{er} cas : $x \geq 1$

On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in [1; x], \frac{\ln(t)}{1+t^2} \geq 0 &\Rightarrow \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \geq 0 \text{ car } x > 1 \\ &\Rightarrow \forall x \geq 1, F(x) \geq 1 \end{aligned}$$

2^{ième} cas : $x \in]0; 1[$

$$\begin{aligned} \forall t \in [x; 1], \frac{\ln(t)}{1+t^2} \leq 0 &\Rightarrow \int_x^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \leq 0 \text{ car } x < 1 \Rightarrow \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in]0; 1[, F(x) \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi F est toujours positive.

b) On sait que :

$$t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2} \in \mathcal{C}^0(]0; +\infty[)$$

Ainsi $F \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[)$ et :

$$\forall x \in]0; +\infty[, F'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse.

c) On a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, F'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

Ainsi on a le tableau de variations suivant :

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
F			

d) On sait que :

$$F'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{\ln(1+h)}{1+(1+h)^2} \text{ avec } x = 1+h$$

On va chercher un $DL_2(1)$ de F' pour avoir un $DL_3(1)$ de F . ATTENTION, il ne faudra pas oublier $F(1)$!!!

On a donc :

$$F'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} = \frac{\ln(1+h)}{1+(1+h)^2} = \frac{h - \frac{h^2}{2}}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2} \times h \left(1 - \frac{h}{2}\right) \times \frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} + o(h^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times h \times \left(1 - \frac{h}{2}\right) \times \left(1 - h + \frac{h^2}{2} + h^2\right) + o(h^2) = \frac{1}{2} \times h \times \left(1 - \frac{3}{2}h\right) + o(h^2) = \frac{1}{2}h - \frac{3}{4}h^2 + o(h^2)$$

Ainsi on a :

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

On a donc :

$$F(x) = F(1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Or :

$$F(1) = \int_1^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$$

On en déduit donc que :

$$F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

2) On a :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

On pose le changement de variables :

$$u = \frac{1}{t}$$

a) On change les bornes :

$$t = 1 \Rightarrow u = 1 \text{ et } t = x \Rightarrow u = \frac{1}{x}$$

b) Calcul du dt

$$t = \frac{1}{u} \Rightarrow dt = -\frac{du}{u^2}$$

c) Changement :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \frac{(-du)}{u^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{-\ln(u)}{1+u^2} du = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

3) a) On peut le voir de deux façons, ce qui revient au même au final car avec la méthode 2, le DL provient du taux de variations !

Méthode 1 : Taux de variation

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = \arctan'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$$

Ainsi Φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\Phi(0) = 1$

Méthode 2 : Avec un $DL_1(0)$

On sait que :

$$\arctan(x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\arctan(x)}{x} = 1 + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 1$$

Ainsi Φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\Phi(0) = 1$

b) On a :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} \times \ln(t) dt = [\arctan(t) \ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$$

$$\Rightarrow \forall x > 0, F(x) = \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \Phi(t) dt$$

c) On sait que Φ est prolongeable par continuité en 0 donc on a :

$$x \mapsto \int_1^x \Phi(t) dt$$

Donc la fonction g existe en 0, et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Il reste à voir $x \mapsto \arctan(x) \ln(x)$

On sait que ;

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \Rightarrow \arctan(x) \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$$

Or on sait par croissance comparée que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan(x) \ln(x) = 0$$

Donc F est prolongeable par continuité en 0 et :

$$F(0) = - \int_1^0 \Phi(t) dt = \int_0^1 \Phi(t) dt$$

On sait de plus que :

$$\forall x > 0, F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} F(X) = \int_0^1 \Phi(t) dt$$

Ainsi Γ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \int_0^1 \Phi(t) dt$

d) On a :

$$\begin{aligned} \forall x > 0, F(x) - F(0) &= \arctan(x) \ln(x) - \int_1^x \Phi(t) dt - \int_0^1 \Phi(t) dt \\ &= \arctan(x) \ln(x) - \left[\int_0^1 \Phi(t) dt + \int_1^x \Phi(t) dt \right] = \arctan(x) \ln(x) - \int_0^x \Phi(t) dt \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x > 0, \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{\arctan(x) \ln(x)}{x} - \frac{1}{x} \times \int_0^x \Phi(t) dt$$

Or on a :

$$\forall x > 0, \forall t \in]0; x[, \Phi(t) > 0 \Rightarrow \forall x > 0, \int_0^x \Phi(t) dt \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x > 0, \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{\arctan(x) \ln(x)}{x}$$

Or on sait que ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x) \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Par comparaison on en déduit donc que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\infty$$

Ainsi F n'est pas dérivable à droite de 0.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser le théorème de la limite-dérivée. On a :

$$\forall x > 0, F'(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

Ainsi d'après le théorème de la limite-dérivée,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -\infty$$

Ainsi F n'est pas dérivable à droite de 0.

d) On en déduit que **F admet une tangente infinie en 0.**

4) a) On **effectue une IPP** :

$$\begin{aligned} \forall (k, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[, I_k(x) &= \int_1^x t^k \ln(t) dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \ln(t) \right]_1^x - \frac{1}{k+1} \int_1^x t^{k+1} \times \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \ln(x) - \frac{1}{k+1} \left[\frac{x^{k+1} - 1}{k+1} \right] \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{(k+1)^2} \end{aligned}$$

b) On sait que :

$$\forall q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Or on sait que :

$$\forall x > 0, -x^2 \neq 1$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[, \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^n (-x^2)^k = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1 - x^2} \\ \Rightarrow \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[, \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \end{aligned}$$

c) On a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_1^x t^{2k} \ln(t) dt$$

Par linéarité de l'intégrale on a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \int_1^x t^{2k} \ln(t) dt = \int_1^x \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \ln(t) dt$$

Or on sait que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0; 1[, \forall t \in [x; 1], F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt - \int_1^x \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \ln(t) dt \\ &= \int_1^x \left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^n (-t^2)^k \right) \ln(t) dt = \int_1^x \left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^n (-t^2)^k \right) \ln(t) dt \\ &= \int_1^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \times \ln(t) dt \\ \Rightarrow \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; 1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| &= \left| \int_1^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \times \ln(t) dt \right| \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_1^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \times \ln(t) dt \right| \leq \int_x^1 \left| \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \times \ln(t) \right| dt \leq \int_x^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \times (-\ln(t)) dt \leq \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt$$

Or : On sait que :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in]0; 1[, \forall t \in [x; 1], \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \\
& \Rightarrow \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} \geq t^{2n+2} \ln(t) \quad (\text{car } \ln(t) < 0 \text{ sur }]0; 1[) \\
& \Rightarrow \int_x^1 \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt \geq \int_x^1 t^{2n+2} \ln(t) dt \Rightarrow \boxed{\int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln(t)}{1+t^2} dt \leq I_{2n+2}}
\end{aligned}$$

d) On sait que F est continue en 0.

De plus $f_k: t \mapsto t^{k+1} \ln(t)$ définie sur $]0; +\infty[$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_k(0) = 0$ par croissance comparée. Enfin on sait que $t \mapsto |t|$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
& \forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]0; 1[, \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq I_{2n+2}(x) \\
& \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} I_{2n+2}(x) \\
& \Rightarrow \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right) \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} I_{2n+2}(x)
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right) = F(0) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (I_{2k}(x))$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} (I_{2k}(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{2k+1} \right) + \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = \frac{1}{2k+1} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2k+1} \ln(x) + \frac{1}{(2k+1)^2} \\
&= \frac{1}{(2k+1)^2}
\end{aligned}$$

Par croissance comparée !

Ainsi on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}}$$

e) On sait que :

$$|F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

On cherche pour quelles valeurs de n on a :

$$\frac{1}{(2n+3)^2} \leq 10^{-2} \Rightarrow 2n+3 \geq 10 \Rightarrow n \geq 4,5$$

Il suffit donc de calculer u_5 pour avoir une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-2} :

$$\boxed{u_5 = \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100}}$$

Ainsi on a :

$$\boxed{F(0) \approx -\frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \frac{1}{81} - \frac{1}{100} \quad (10^{-2})}$$

On peut par exemple créer un programme Python :

```

Rechercher:
def va(n):
    u=0
    for i in range(n+1):
        u=u+(-1)**i/((2*i+1)**2)
    return u

Méthode des rectangles et loi normale.py x module1 x
Console Python
Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc.| (
:56:50) [MSC v.1600 32 bit (Intel)] on win32.
>>> va(5)
0.9125619418260111

```

5) Je trace ici grâce à géogébra :

