

Correction DS n°2

Exercice 1 : Une étude de fonction

Dans cet exercice on pose la fonction $f: x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$.

De plus on pose $P: x \mapsto 4x^3 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que l'ensemble de définition de f est $[-1; 1]$.

2) Déterminer $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$.

3) Dans cette question on cherche à résoudre $P(x) = 1$ et $P(x) = -1$.

a) Déterminer trois réels a, b, c tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x^3 - 3x - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

b) En déduire les solutions de $P(x) = 1$.

c) Sur le même modèle, résoudre l'équation $P(x) = -1$ (On pourra remarquer que -1 est solution).

4) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f .

5) a) Montrer que :

$$\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$

b) En déduire une expression de $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

6) Dresser le tableau de variation de f sur $[-1; 1]$.

7) a) Démontrer que :

$$\forall x \in [-1; 1], \exists! \theta_x \in [0; \pi] \text{ tel que } \cos(\theta_x) = x$$

b) Démontrer que :

$$\forall \theta_x \in [0; \pi], f(\cos(\theta_x)) = \arccos(\cos(3\theta_x))$$

c) En déduire, en fonction des valeurs de $\theta_x \in [0; \pi]$, une expression simplifiée de $f(\cos(\theta_x))$.

d) Exprimer alors $f(x)$ en fonction de $\arccos(x)$ pour $x \in [-1; 1]$.

(On pourra faire une disjonction de 3 cas !).

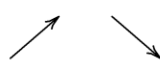
8) Tracer la courbe de f .

1) On sait que Arccos est définie sur $[-1; 1]$. On doit donc étudier la fonction $g: x \mapsto 4x^3 - 3x$

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x + 1)(2x - 1)$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	
$2x-1$	$-$		0	$+$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g					

De plus on a :

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{8} + \frac{3}{2} = 1 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

De plus on a :

$$g(-1) = -4 + 3 = -1 \text{ et } g(1) = 1$$

On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
g			1			

D'après les variations de g on en déduit donc que :

$$4x^3 - 3x \in [-1; 1] \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$$

2) a) Pour faire cette question on peut raisonner de plusieurs façons.

Méthode 1 : En développant puis en identifiant

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

On identifie :

$$(x-1)(ax^2 + bx + c) = 4x^3 - 3x - 1 \Leftrightarrow ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c = 4x^3 - 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b - a = 0 \\ c - b = -3 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

Méthode 2 : En utilisant plusieurs valeurs de x

On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(ax^2 + bx + c) &= 4x^3 - 3x - 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \text{ (obtenue pour } x = 0) \\ 4x + 2b + c = 25 \text{ (obtenue pour } x = 2) \\ -2(a - b + c) = -2 \text{ (obtenue pour } x = -1) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que cela fonctionne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-1)(4x^2 + 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + 4x^2 - 4x + x - 1 = 4x^3 - 3x - 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x^3 - 3x - 1 = (x-1)(4x^2 + 4x + 1)$$

b) Ainsi on a :

$$\begin{aligned} P(x) = 1 &\Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(4x^2 + 4x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{ou} \\ (2x+1)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$P(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

c) On a : $P(-1) = 4(-1)^3 - 3(-1) = -1$.

Ainsi -1 est racine du polynôme $Q(x) = 4x^3 - 3x + 1$. On peut donc factoriser comme précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(a'x^2 + b'x + c)$$

Avec la valeur en 0 on obtient que $c = 1$. De plus on a $a = 4$ pour une question de degré. Enfin b vérifie :

$$a' + b' = 0 \text{ et } b' + c = -3$$

On a donc $b' = -4$. Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4x^3 - 3x + 1 = (x+1)(4x^2 - 4x + 1) = (x+1)(2x-1)^2$$

Ainsi on a :

$$P(x) = -1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

3) On sait que Arccos est dérivable sur $] -1; 1[$. Or on a d'après la question précédente que :

$$P(x) = \pm 1 \Leftrightarrow x \in \left\{ -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

Ainsi on a f dérivable sur $] -1; -\frac{1}{2}[$, sur $] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et sur $] \frac{1}{2}; 1[$.

4) a) On pose la fonction h définie sur $[-1; 1]$ par :

$$\forall x \in [-1; 1], h(x) = \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x)$$

On sait que h est dérivable sur $] -1; 1[$ et :

$$\forall x \in] -1; 1[, h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ainsi h est constante sur $] -1; 1[$ et vaut $h(0) = 2\text{Arccos}(0) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

De plus par continuité de h on a :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = h(-1) = \pi \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = h(1) = \pi$$

Ainsi on a bien :

$$\forall x \in [-1; 1], \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0; 1], f(-x) &= \text{Arccos}(4(-x)^3 - 3(-x)) = \text{Arccos}(-4x^3 + 3x) = \text{Arccos}(-(4x^3 - 3x)) \\ &= \pi - \text{Arccos}(4x^3 - 3x) = \pi - f(x) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [0; 1], f(-x) = \pi - f(x)$$

5) On a :

$$\forall x \in [0; 1], x \notin \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}, f'(x) = -\frac{12x^2 - 3}{\sqrt{1 - (4x^3 - 3x)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1 - (4x^3 - 3x)^2}} \times (1 - 4x^2)$$

De plus on a :

$$f(0) = \text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = \text{Arccos}(-1) = \pi$$

On a de plus établi la relation suivante :

$$\forall x \in [-1; 1], f(-x) = \pi - f(x)$$

On en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	
$f'(x)$	-		+	+		-
$f(x)$	π					π

7) a) On peut ici utiliser le fait que $\cos$ est

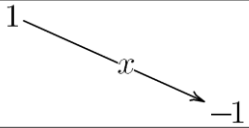
- continue sur $[0; \pi]$
- strictement décroissante
- $\cos(0) = 1, \cos(\pi) = -1$

Donc d'après le théorème de la bijection, $\cos$ réalise une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$. Ainsi on a :

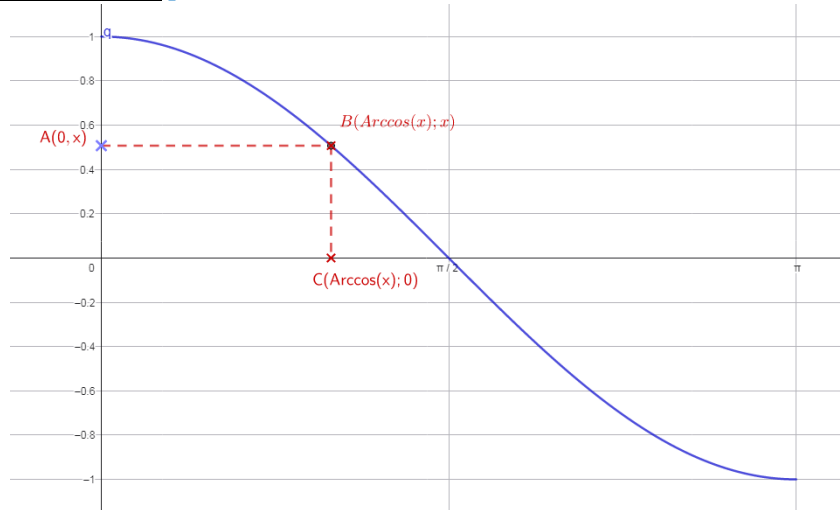
$$\forall x \in [-1; 1], \exists! \theta_x \in [0; \pi] \text{ tel que } \cos(\theta_x) = x$$

On illustre cela sur le tableau de variations de $\cos$ restreinte sur $[0; \pi]$ et aussi sur sa courbe.

x	0	θ_x	π
COS	1		-1



On sait même que $\theta_x = \text{Arccos}(x)$ par définition.



b) On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$$

De même on a :

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos(x + x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1 \\ \sin(2x) &= \sin(x + x) = 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= 2\cos(x)^3 - \cos(x) - 2\sin(x)^2\cos(x) \\ &= 2\cos(x)^3 - \cos(x) - 2(1 - \cos(x)^2)\cos(x) \\ &= 4\cos(x)^3 - 3\cos(x) \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall \theta_x \in [0; \pi], f(\cos(\theta_x)) = \text{Arccos}(4\cos(\theta_x)^3 - 3\cos(\theta_x)) = \text{Arccos}(\cos(3\theta_x))$$

c) On sait que :

$$\forall x \in [0; \pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

Or on sait que :

$$\forall \theta_x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], 3\theta_x \in [0; \pi]$$

On en déduit donc que :

$$\forall \theta_x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right], f(\cos(\theta_x)) = \text{Arccos}(\cos(3\theta_x)) = 3\theta_x$$

De plus on a :

$$\forall \theta_x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right], 3\theta_x \in [\pi; 2\pi] \text{ donc } 2\pi - 3\theta_x \in [0; \pi]$$

On en déduit donc que :

$$\forall \theta_x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right], f(\cos(\theta_x)) = \text{Arccos}(\cos(3\theta_x)) = \text{Arccos}(\cos(2\pi - 3\theta_x)) = 2\pi - 3\theta_x$$

Enfin on a :

$$\forall \theta_x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right], 3\theta_x \in [2\pi; 3\pi] \text{ donc } 3\pi - 3\theta_x \in [0; \pi]$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \forall \theta_x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right], f(\cos(\theta_x)) &= \text{Arccos}(\cos(3\theta_x)) \\ &= \text{Arccos}(-\cos(3\pi - 3\theta_x)) \\ &= \pi - \text{Arccos}(\cos(3\pi - 3\theta_x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi - (3\pi - 3\theta_x) \\
 &= 3\theta_x - 2\pi
 \end{aligned}$$

On récapitule donc :

$$f(\cos(\theta_x)) = \begin{cases} 3\theta_x \text{ si } \theta_x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \\ 2\pi - 3\theta_x \text{ si } \theta_x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \\ 3\theta_x - 2\pi \text{ si } \theta_x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right] \end{cases}$$

d) On sait que :

$$\forall x \in [-1; 1], \theta_x = \text{Arccos}(x)$$

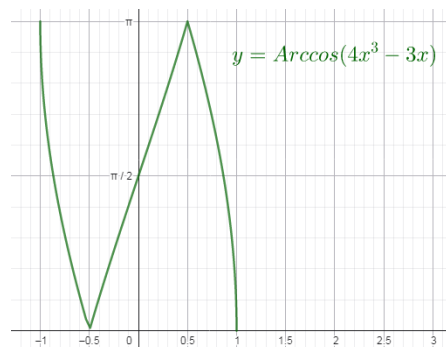
De plus on a :

$$\begin{aligned}
 \theta_x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \\
 \theta_x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] &\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\
 \theta_x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right] &\Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]
 \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f(x) = \begin{cases} 3\text{Arccos}(x) - 2\pi \text{ si } x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \\ 2\pi - 3\text{Arccos}(x) \text{ si } x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \\ 3\text{Arccos}(x) \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

8) On a la courbe suivante :



Exercice 2 : Une nouvelle somme

Dans tout cet exercice on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^n k^4$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, H_j: x \mapsto \prod_{i=0}^{j-1} (x+i) \text{ définie sur } \mathbb{R}$$

Le but de cet exercice est d'exprimer S_n en fonction de n .

- 1) Calculer $H_j(0)$, $H_j(1)$ et $H_1(x)$.
- 2) a) Exprimer $H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1)$ en fonction de $H_j(x)$.
b) En déduire que :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_j(k) = j! \times \binom{n+j}{j+1}$$

3) Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n H_1(k) = \frac{n(n+1)}{2}$$

4) Déduire des deux questions précédentes que :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5) Démontrer par la méthode de votre choix que :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

6) En déduire que S_n s'écrit :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{30} \times P(n) \text{ (où } P \text{ est un polynôme à déterminer)}$$

1) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{N}^*, H_j(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+j-1)$$

Ainsi on a :

$$H_j(0) = 0, H_j(1) = j! \text{ et } H_1(x) = x$$

2) a) On a :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}^*, H_{j+1}(x) - H_{j+1}(x-1) &= \prod_{i=0}^j (x+i) - \prod_{i=0}^j (x-1+i) \\ &= \prod_{i=0}^j (x+i) - \prod_{i=-1}^{j-1} (x+i) \\ &= (x+j) \prod_{i=0}^{j-1} (x+i) - (x-1) \prod_{i=0}^{j-1} (x+i) \\ &= (j+1)H_j(x) \end{aligned}$$

b) On a alors :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_j(k) &= \frac{1}{j+1} \sum_{k=1}^n [H_{j+1}(k) - H_{j+1}(k-1)] \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \frac{1}{j+1} [H_{j+1}(n) - H_{j+1}(0)] \text{ (par télescopage)} \\ &= \frac{1}{j+1} H_{j+1}(n) \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$H_{j+1}(n) = \prod_{i=0}^j (n+i) = \frac{(n+j)!}{(n-1)!}$$

On a donc :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_j(k) = \frac{1}{j+1} \times \frac{(n+j)!}{(n-1)!} = j! \times \frac{(n+j)!}{(j+1)! \times (n+j-(j+1))!} = j! \binom{n+j}{j+1}$$

3) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_1(k) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(C'est un résultat du cours, on peut penser à Gauss).

4) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_2(k) = 2! \times \binom{n+2}{3} = 2! \times \frac{(n+2)!}{3! \times (n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}$$

De plus on sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, H_2(k) = k(k+1) = k^2 + k$$

Ainsi on a :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n [H_2(k) - k] = \frac{(n+2)(n+1)n}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6} (2(n+2) - 3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5) On peut le faire de trois façons différentes ici.

Méthode 1 : Récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n): " \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} "$$

Initialisation : Pour $n = 1$ on a :

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul fixé. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors :

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (\mathbf{HR}_n)$$

On veut montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \underbrace{\sum_{k=1}^n k^3}_{\mathbf{HR}_n} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) = \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \end{aligned}$$

On en déduit donc que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire donc d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Méthode 2 : Avec le binôme de Newton

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k+1)^4 &= \sum_{k=1}^n [k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1] = \sum_{k=1}^n k^4 + 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} \left[(n+1)^4 - 1 - 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \right] = \\ &= \frac{1}{4} [(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)] \\ &= \frac{n+1}{4} [(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1] \\ &= \frac{n+1}{4} [n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n(2n+1) - 2n - 1] \\ &= \frac{n(n+1)}{4} [n^2 + n] \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

Méthode 3 : Ce que nous invite à faire l'exercice

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_3(k) = 3! \binom{n+3}{4} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4}$$

De plus on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, H_3(k) = k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n [H_3(k) - 3k^2 - 2k] = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - n(n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + 5n + 6 - 4n - 2 - 4) = \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \end{aligned}$$

6) De la même façon que précédemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n H_4(k) = 4! \binom{n+4}{5} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5}$$

De plus on sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, H_4(k) = k(k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k^3 + 5k^2 + 6k) = k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^4 &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5} - \frac{6n^2(n+1)^2}{4} - \frac{11}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{6}{2}n(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{30} [6(n+2)(n+3)(n+4) - 45n(n+1) - 55(2n+1) - 80] \end{aligned}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} P(n) &= 6(n+2)(n+3)(n+4) - 45n(n+1) - 55(2n+1) - 80 \\ &= 6n^3 + 54n^2 + 156n + 144 - 45n^2 - 45n - 110n - 55 - 80 \\ &= 6n^3 + 9n^2 + n - 1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)}{30} (6n^3 + 9n^2 + n - 1)$$

Exercice 3 : La fonction Argch

Dans tout ce problème on rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Partie A : Etude de ch

- 1) Démontrer que ch ne définit pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que la restriction de ch à $[0; +\infty[$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un ensemble à déterminer. On appelle la bijection réciproque de ch , restreinte sur $[0; +\infty[$, $Argch$.
- 3) Démontrer que :

$$\forall x \geq 1, Argch(x) = \ln(\sqrt{x^2 - 1} + x)$$

- 4) Démontrer que :

$$\forall x > 1, Argch'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

- 5) Dans cette question on pose :

$$g: x \mapsto Argch\left(\sqrt{\frac{1 + ch(x)}{2}}\right)$$

Déterminer l'ensemble de définition de g puis reconnaître une fonction bien connue étudiée cette année en classe.

- 1) On a $ch(1) = ch(-1)$ donc ch n'est pas bijective (elle est paire !).

2) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$$

De plus on sait que :

$$e^x - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow x \geq -x \text{ (car la fonction ln est croissante sur }]0; +\infty[) \\ \Leftrightarrow x \geq 0$$

On en déduit donc que ch est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et continue. Donc ch réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[ch(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) [$

De plus on a :

$$ch(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Ainsi ch réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

3) Soit $y \in [1; +\infty[$. On a :

$$ch(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2y(e^x) + 1 = 0$$

On a :

$$\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1) \geq 0 \text{ car } y \geq 1$$

On a donc :

$$ch(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 - 1} \\ \text{ou} \\ e^x = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 - 1} \end{cases}$$

De plus on a :

$$\forall y \geq 1, y^2 - 1 < y^2 \Rightarrow \sqrt{y^2 - 1} < |y|$$

Ainsi on a :

$$\forall y \geq 1, y - \sqrt{y^2 - 1} > 0 \text{ et } y + \sqrt{y^2 - 1} > 0$$

Ainsi on a :

$$ch(x) = y \Leftrightarrow x \in \left\{ \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}); \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \right\}$$

Cependant on cherche la valeur de x positive. On sait que :

$$\forall y \geq 1, y + \sqrt{y^2 - 1} \geq 1$$

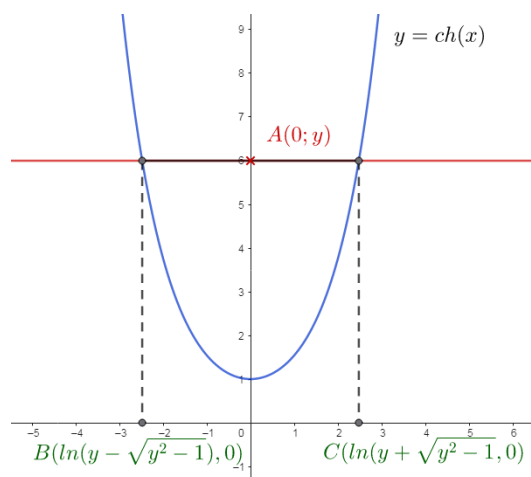
Ainsi on a :

$$\boxed{\text{Argch: } x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}$$

Remarque : Comme ch est paire donc c'est normal que l'on ait deux antécédents pour $ch(x) = y$.

Remarque 2 : On a :

$$\begin{aligned} y > 1 &\Rightarrow -2y < -2 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1 \\ \Rightarrow \sqrt{y^2 - 2y + 1} &< \sqrt{y^2 - 1} \text{ (car } y \geq 1 \text{ et } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante)} \\ \Rightarrow y - 1 &< \sqrt{y^2 - 1} \text{ (car } y - 1 > 0) \\ \Rightarrow y - \sqrt{y^2 - 1} &< 1 \Rightarrow \ln(y - \sqrt{y^2 - 1}) < 0 \end{aligned}$$



4) On sait que :

$$\forall x > 0, ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \text{ (car } x \neq -x)$$

On en déduit donc que $Argch$ est dérivable sur $]1; +\infty[$ et :

$$\frac{d}{dx}(Argch(x)) = \frac{d}{dx}(x + \sqrt{x^2 - 1}) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

5) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1 + ch(x)}{2} \geq 1$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{\frac{1 + ch(x)}{2}} \geq 1 \text{ car } x \mapsto \sqrt{x} \text{ est croissante}$$

Donc g est définie sur $\mathbb{R}$. De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1 + ch(x)}{2} = \frac{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}}{2} = \frac{2 + e^x + e^{-x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = [ch(x)]^2$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{\frac{1 + ch(x)}{2}} = \sqrt{[ch(x)]^2} = ch(x) \text{ car } ch(x) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Argch\left(\sqrt{\frac{1 + ch(x)}{2}}\right) = Argch(ch(x))$$

Si $x \geq 0$, on a : $Argch(ch(x)) = x$.

De plus on a :

$$\forall x \leq 0, Argch(ch(x)) = Argch(ch(-x)) \text{ (par parité)} \\ = -x$$

Ainsi on a :

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} = |x|$$

Problème 1 : Deux résultats du triangle de Pascal

Le but de ce problème est de s'intéresser à la troisième colonne du triangle de Pascal, plus particulièrement à la somme des inverses des coefficients $\binom{n}{2}$, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Partie A : Une première somme

1) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{\binom{k}{2}} = \frac{2(n-1)}{n}$$

3) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\binom{k}{2}}$$

Remarque : On verra plus tard dans l'année que l'on peut noter :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k}{2}} = 2$$

Nous allons à présent, dans la partie B et C, démontrer un joli résultat. Si l'on fait la somme alternée (mais tous les deux signes !) des inverses des coefficients de la troisième colonne, nous découvrons une jolie connexion entre les coefficients du triangle de Pascal et π . Nous allons démontrer que :

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{21}\right) - \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{36}\right) + \dots = \pi - 2$$

Cela revient à démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} \right] = \pi - 2$$

Dans toute la suite de ce problème, nous allons poser :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} \right]$$

Partie B : Simplification de la somme

- 1) a) Calculer la valeur de S_1 .
b) Montrer que :

$$S_2 = \frac{16}{15}$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, S_n = 4 \times \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)}$$

- 3) a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{a}{2k-1} + \frac{b}{2k+1}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, S_n = 4 \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} - 2 + 4 \times \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Il reste donc à trouver :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Nous allons démontrer cela dans la partie C.

Partie C : Etude de la limite

Dans toute cette partie on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \text{ et } f_n(x) = \arctan(x) - P_{n+1}(x)$$

1) Déterminer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

2) Montrer que la fonction f_n est impaire.

3) a) Démontrer que :

$$\forall q \in \mathbb{R}, q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

b) Démontrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1 + x^2}$$

c) En déduire que :

$$\forall x \geq 0, \begin{cases} 0 \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq 0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

c) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, |\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

d) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}$$

e) En déduire que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

4) Démontrer que :

$$\lim_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} \right] = \pi - 2$$

Partie A : Une première somme

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{\binom{k}{2}} = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k(k-1)} = 2 \sum_{k=2}^n \frac{k-(k-1)}{k(k-1)}$$

$$= 2 \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{2(n-1)}{n} \text{ (par télescopage)}$$

3) On a :

$$\lim_n \sum_{k=2}^n \frac{1}{\binom{k}{2}} = \lim_n \frac{2(n-1)}{n} = \lim_n \left(2 - \frac{2}{n} \right) = 2$$

On a donc :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\binom{k}{2}} = 2$$

Partie B : Simplification de la somme

1) a) On a :

$$S_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

b) On a :

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{10} \right) = \frac{40}{30} - \frac{8}{30} = \frac{32}{30} = \frac{16}{15}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} &= \frac{2}{2k(2k-1)} + \frac{2}{2k(2k+1)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) = \frac{1}{k} \times \frac{2k+1+2k-1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, S_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{4}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= 4 \times \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, S_n = 4 \times \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)}$$

3) a) On a :

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{(2k+1) - (2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2k+1}$$

On a donc :

$$a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}$$

b) On a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

De plus on a :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \times \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \times \frac{1}{2k+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} \\
&= 1 + 2 \times \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} + \frac{(-1)^n}{2n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

c) On a d'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
S_n &= 4 \times \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)} = 4 \times \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{(-1)^n}{2n+1} \right) \\
&= 4 \times \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} - 1 \right) + 2 \times \frac{(-1)^n}{2n+1} \\
&= 4 \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} - 2 + 2 \times \frac{(-1)^n}{2n+1}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{S_n = 4 \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} - 2 + 2 \times \frac{(-1)^n}{2n+1}}$$

Partie C : Etude de la limite

1) On a :

$$P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) &= \arctan(-x) - P_{n+1}(-x) = -\arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (-x)^{2k+1} \\
&= -\arctan(x) - \left(-\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} (x)^{2k+1} \right) = -[\arctan(x) - P_{n+1}(x)] = -f_n(x)
\end{aligned}$$

Ainsi f_n est impaire.

3) a) C'est du cours.

b) On a P_{n+1} est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$, $\arctan$ est elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f'_n(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{d}{dx} (x^{2k+1}) \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \times (2k+1)x^{2k} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^n (-x^2)^k \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} \text{ (car } -x^2 \leq 0 \text{ donc } -x^2 \neq 1) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f'_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

c) D'après la question précédente, on en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f'_n(x) = \begin{cases} -\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \geq 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit donc que f_n est croissante si n est impair et f_n est décroissante si n est pair.

De plus on a :

$$f_n(0) = 0$$

On en déduit donc que :

1^{er} cas : n est pair

On a f_n décroissante et $f_n(0) = 0$ on en déduit donc :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 0, f_n(x) \leq 0 &\Rightarrow \arctan(x) - P_{n+1}(x) = \arctan(x) - P_n(x) - \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right) \leq 0 \\ &\Rightarrow \arctan(x) - P_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

De plus f_{n-1} est croissante et $f_{n-1}(0) = 0$ donc on a :

$$\forall x \geq 0, f_{n-1}(x) \geq 0 \text{ donc } \arctan(x) - P_n(x) \geq 0$$

Ainsi on en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x \geq 0, 0 \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

2^{ème} cas : n est impair

On a f_n croissante et $f_n(0) = 0$ on en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \forall x \leq 0, f_n(x) \leq 0 &\Rightarrow \arctan(x) - P_{n+1}(x) = \arctan(x) - P_n(x) - \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right) \leq 0 \\ &\Rightarrow \arctan(x) - P_n(x) \leq -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} -(\arctan(x) - P_n(x)) &\geq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &\Rightarrow \arctan(-x) - P_n(-x) \geq \frac{(x)^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

On pose alors $X = -x \in \mathbb{R}^+$ et on obtient :

$$\forall X \geq 0, \arctan(X) - P_n(X) \geq \frac{(-X)^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\boxed{\Rightarrow \forall X \geq 0, \arctan(X) - P_n(X) \geq -\frac{X^{2n+1}}{2n+1}}$$

Enfin f_{n-1} est décroissante et $f_{n-1}(0) = 0$ donc on a :

$$\forall x \geq 0, \arctan(x) - P_n(x) \leq 0$$

Ainsi on a :

$$\boxed{\forall x \geq 0, \begin{cases} 0 \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}}$$

d) D'après la question précédente on a :

$$\forall x \geq 0, \begin{cases} 0 \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq \arctan(x) - P_n(x) \leq 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, |\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Enfin si $x \leq 0, -x \geq 0$ et on a :

$$\forall x \leq 0, |\arctan(-x) - P_n(-x)| \leq \frac{(-x)^{2n+1}}{2n+1}$$

Or on a :

$$\forall x \leq 0, -x = |x|$$

On a donc :

$$\begin{aligned} |-(\arctan(x) - P_n(x))| &\leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \text{ (par imparité de } f_{n-1}) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^-, |\arctan(x) - P_n(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}}$$

e) Il suffit d'utiliser l'inégalité précédente pour $x = 1$:

$$|\arctan(1) - P_n(1)| \leq \frac{1}{2n+1}$$

Or on a :

$$\begin{cases} \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \\ P_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \end{cases}$$

De plus on a :

$$\lim_n \frac{1}{2n+1} = 0$$

Donc d'après le théorème de convergence par encadrement (ou théorème des gendarmes) :

$$\lim_n \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| = 0$$

Donc on a :

$$\boxed{\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

4) On a vu précédemment que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} \right] = 4 \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} - 2 + 2 \times \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \times \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \text{ et } \lim_n \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$$

Donc par somme des limites on obtient :

$$\boxed{\lim_n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{\binom{2k}{2}} + \frac{1}{\binom{2k+1}{2}} \right] = \pi - 2}$$