

Correction DS n°5

Exercice 1 : Une équation fonctionnelle

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et vérifiant la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \times f(y) \quad (*)$$

- 1) Déterminer les fonctions constantes vérifiant (*).
- 2) Démontrer que si $f(0) \neq 0$, $f(0) = 1$.
- 3) Montrer que f est paire.
- 4) Dans cette question on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
On pose de plus la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{x_0}{\sqrt{2^n}}$$

- a) Montrer que la suite $(f(x_n))$ est constante.
- b) En déduire que si $f(0) \neq 0$, f ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$.
- c) En déduire que :

$$f(0) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

- 5) Dans cette question on suppose que $f(0) \neq 0$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \ln(f(\sqrt{x}))$$

- a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
- b) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, g(x + y) = g(x) + g(y)$$

- c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, g(nx) = ng(x)$$

- d) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}^+, g(x) = xg(1)$$

- e) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xg(1)$$

- 6) Déterminer alors toutes les solutions vérifiant (*) et continues sur $\mathbb{R}$.

- 1) On pose :

$$\exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$$

On a alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \times f(y) \Leftrightarrow a = a^2 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = 0$$

Ainsi nous avons deux fonctions constantes qui vérifient (*), la fonction nulle et la fonction constante qui vaut 1.

- 2) On a :

$$f(0) = f(\sqrt{0^2 + 0^2}) = f(0)^2$$

Ainsi si $f(0) \neq 0$, alors $f(0) = 1$

- 3) 1^{er} cas : $f(0) = 0$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, f(-x) = f(\sqrt{x^2 + 0^2}) = f(x) \times f(0) = 0 = f(x)$$

2^{ème} cas : si $f(0) \neq 0$

On sait alors d'après la question 2 que $f(0) = 1$

Or on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, f(-x) = f\left(\sqrt{x^2 + 0^2}\right) = f(x) \times f(0) = f(x)$$

Ainsi f est paire dans les deux cas.

4) a) On suppose que $f(x_0) = 0$. Comme f est paire, on peut supposer $x_0 > 0$, quitte à changer x_0 en $-x_0$ dans le raisonnement.

Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right) = 0$$

Initialisation : $n = 0$

C'est l'énoncé car $f(x_0) = 0$

Hérédité : On suppose que pour un rang n , on a :

$$f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right) = 0$$

On a alors :

$$\left[f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^{n+1}}}\right)\right]^2 = 0 = f\left(\sqrt{2 \times \frac{(x_0)^2}{2^{n+1}}}\right) = f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right) = 0 \text{ (car } \sqrt{(x_0)^2} = x_0)$$

Conclusion : On en déduit donc d'après le principe de récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right) = 0$$

b) On raisonne par l'absurde. On suppose que $f(0) \neq 0$ et que f s'annule sur $\mathbb{R}$. Donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Or d'après la question précédente on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right) = 0$$

On en déduit donc que $\left(f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right)\right)$ converge vers 0. Or f est continue donc on a :

$$\lim_n f\left(\frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right) = f\left(\lim_n \frac{x_0}{\sqrt{2^n}}\right) = f(0) = 0$$

Cela est **impossible**. Ainsi f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

c) On sait qu'une **fonction continue qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ est de signe constant d'après le corollaire du TVI**. De plus comme $f(0) = 1 > 0$, ainsi f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

5) a) $\ln$ est définie sur $]0; +\infty[$ et $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$. De plus d'après la question précédente on sait que $f(x) > 0$ pour tout x réel. Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f(\sqrt{x}) > 0$$

Donc g est bien définie.

b) On a :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, g(x) + g(y) = \ln(f(\sqrt{x})) + \ln(f(\sqrt{y})) = \ln(f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{y}))$$

$$= \ln \left(f \left(\sqrt{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2} \right) \right) = \ln f(\sqrt{x+y}) = g(x+y)$$

c) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) = "\forall x \in \mathbb{R}^+, g(nx) = ng(x)"$

Initialisation : $n = 0$

On a :

$$\text{On a : } g(0) = g(0+0) = g(0) + g(0)$$

$$\text{On en déduit donc que } g(0) = 0 = 0 \times g(1)$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g((n+1)x) = g(nx+x) = g(nx) + g(x) = ng(x) + g(x) = (n+1)g(x)$$

Ainsi $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

d) On a :

$$\forall x \in \mathbb{Q}^+, x = \frac{p}{q}, (p, q) \in \mathbb{Q}^+$$

On a alors d'après la question précédente :

$$g(p) = pg(1)$$

De plus on a :

$$g(p) = g\left(q \times \frac{p}{q}\right) = qg\left(\frac{p}{q}\right)$$

On en déduit donc que :

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}g(1)$$

e) Il suffit de conclure par densité de $\mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists (x_n) \in (\mathbb{Q}^+)^{\mathbb{N}} \text{ tel que } x_n \rightarrow x$$

Remarque : On peut par exemple poser :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{[10^n \times x]}{10^n}$$

De plus comme g est continue par composée, on a :

$$g(x_n) \rightarrow g(x)$$

De plus on a :

$$g(x_n) = x_n g(1) \rightarrow x g(1)$$

Par unicité de la limite on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = xg(1)$$

6) On a donc :

$$f(0) \neq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0, \ln(f(\sqrt{x})) = x \ln(f(\sqrt{1})) = x \ln(f(1))$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \geq 0, f(\sqrt{x}) = f(1)^x$$

Par parité de f on en déduit donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)^{x^2}$$

Ainsi f continue vérifie (*) si et seulement :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^{+*} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda^{x^2} \\ \text{ou bien } f = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

Exercice 2 : Tout doux !

On pose l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

1) Démontrer que :

$$\forall t \in [0; \sqrt{n}], \exists ! u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } t = \sqrt{n} \cos(u)$$

2) En déduire à l'aide d'un changement de variable que :

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du$$

3) A l'aide d'une IPP, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = W_{n-1} - \frac{1}{2n} W_n$$

4) En déduire la valeur de I_n en fonction de n .

1) On pose :

$$\forall u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], g(u) = \sqrt{n} \cos(u)$$

On a alors $g \in \mathcal{C}^\infty \left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ et :

$$\forall u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], g'(u) = -\sqrt{n} \sin(u) \leq 0$$

De plus g' ne s'annule que pour $u = 0$. Ainsi on en déduit que :

- g est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- g est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\begin{cases} g(0) = \sqrt{n} \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

D'après le théorème de la bijection, on en déduit donc que g réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[0; \sqrt{n}]$. Ainsi on a :

$$\forall t \in [0; \sqrt{n}], \exists ! u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } t = \sqrt{n} \cos(u)$$

2) Il suffit de poser u tel que :

$$t = \sqrt{n} \cos(u)$$

- En changeant les bornes on a :

$$u = 0 \Rightarrow t = \sqrt{n}$$

$$u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

- Calcul du dt

On a :

$$t = \sqrt{n} \cos(u) \Rightarrow dt = -\sqrt{n} \sin(u) du$$

- On remplace :

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2(u))^n (-\sqrt{n} \sin(u)) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du$$

3) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(u)) \sin^{2n-1}(u) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(u)) \sin^{2n-1}(u) du = W_{2n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \times [\cos(u) \sin^{2n-1}(u)] du \\ &= W_{n-1} - \left[\frac{\cos(u) \sin^{2n}(u)}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) \times \left[\frac{1}{2n} \sin^{2n}(u) \right] du = W_{n-1} - \frac{1}{2n} W_n \end{aligned}$$

4) On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n \left(\frac{2n+1}{2n} \right) = W_{n-1}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{2n}{2n+1} W_{n-1}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2n-1} \times \frac{2(n-2)}{2n-3} \times \dots \times \frac{2}{3} \times W_0$$

Or on sait que :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^1(u) du = 1$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \times \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Grâce à Elisabeth et Baptiste, je vous propose ce joli problème.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On définit dans tout ce problème les matrices pliages de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ par :

$$P(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

On note $P_4(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices pliages de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$:

$$P_4(\mathbb{C}) = \{P(a, b), (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$$

Partie A : Echauffement

- 1) Montrer que I_4 est pliable.
- 2) Démontrer que $P_4(\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire. C'est-à-dire que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \forall (M_1, M_2) \in (P_4(\mathbb{C}))^2, \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in P_4(\mathbb{C})$$

- 3) a) Démontrer que $P_4(\mathbb{C})$ est stable par produit. C'est-à-dire que :

$$\forall (M_1, M_2) \in (P_4(\mathbb{C}))^2, M_1 \times M_2 \in P_4(\mathbb{C})$$

- b) Démontrer que le produit sur $P_4(\mathbb{C})$ est commutatif.

- 4) a) Démontrer que :

$$P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 3b^2 - 2ab - a^2 \neq 0$$

Indication : On pourra effectuer le produit $P(a, b) \times P(a', b')$

- b) En déduire que :

$$P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -3b \end{cases}$$

- c) Si $P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C})$, déterminer $(a', b') \in \mathbb{C}^2$ tel que $P(a', b') = [P(a, b)]^{-1}$

Partie B : Diagonalisation et application

On rappelle qu'une matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telle que :

$$A = QDQ^{-1}$$

Nous allons montrer ici que toute matrice de $P_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

- 1) a) Démontrer que :
 $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \exists! (\lambda_{a,b}, \mu_{a,b}) \in \mathbb{C}^2$ tel que $P(a, b) = \lambda_{a,b}P(1,1) + \mu_{a,b}P(1,0)$
- b) On pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $Q \in GL_4(\mathbb{C})$ puis déterminer son inverse.

- c) Déterminer la matrice diagonale D telle que :

$$P(1,1) = QDQ^{-1}$$

- d) En déduire que toute matrice de $P_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Dans toute la suite de ce problème on pose :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, D_{a,b} \text{ la matrice diagonale de } \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \text{ tel que :}$$

$$P(a, b) = Q \times D_{a,b} \times (Q)^{-1}$$

2) Dans cette question on dispose de quatre fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} (f_1)' = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_2)' = 2f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_3)' = 2f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 2f_4 \\ (f_4)' = 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 \end{cases}$$

De même on pose :

$$X = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \text{ et } X' = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} (f_1)' \\ (f_2)' \\ (f_3)' \\ (f_4)' \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que :

$$X' = P(3,2)X \Leftrightarrow (Q)^{-1}X' = D_{3,2}(Q)^{-1}X$$

b) On pose :

$$Y = (Q)^{-1}X = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, (g_i)' = g_i \\ (g_4)' = 9g_4 \end{cases}$$

c) En déduire les solutions de :

$$\begin{cases} (f_1)' = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_2)' = 2f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_3)' = 2f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 2f_4 \\ (f_4)' = 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 \end{cases}$$

3) Calculer par la méthode de votre choix :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(a, b)^n$$

1) On a $I_4 = P(1, 0)$

2) Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ et $(M_1, M_2) \in (P_4(\mathbb{C}))^2$. On pose :

$$M_1 = P(a_1, b_1) \text{ et } M_2 = P(a_2, b_2)$$

On a alors :

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = P(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)$$

Ainsi $P_4(\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire.

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \forall (M_1, M_2) \in (P_4(\mathbb{C}))^2$$

3) a) Soient $M_1 = P(a_1, b_1)$ et $M_2 = P(a_2, b_2)$ deux matrices de $P_4(\mathbb{C})$.

On a alors :

$$\begin{aligned} M_1 \times M_2 &= P(a_1, b_1) \times P(a_2, b_2) = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & b_1 & a_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & b_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 & b_2 & b_2 \\ b_2 & b_2 & a_2 & b_2 \\ b_2 & b_2 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} = P(a_1 a_2 + 3b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2b_1 b_2) \end{aligned}$$

b) Le produit et la somme sur $\mathbb{C}$ étant commutatifs, on a :

$$P(a_1 a_2 + 3b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2b_1 b_2) = P(a_2 a_1 + 3b_2 b_1, b_1 a_2 + b_2 a_1 + 2b_1 b_2)$$

4) a) On sait que :

$$P(a_1, b_1) \times P(a_2, b_2) = P(a_2 a_1 + 3b_2 b_1, b_1 a_2 + b_2 a_1 + 2b_1 b_2)$$

Ainsi on cherche à résoudre :

$$P(a_1, b_1) \times P(a_2, b_2) = I_4 = P(1, 0)$$

On a donc :

$$P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \exists! (a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (S): \begin{cases} aa_2 + 3bb_2 = 1 \\ a_2 b + b_2(a + 2b) = 0 \end{cases}$$

Or on sait qu'un système linéaire admet une unique solution si et seulement si son déterminant est non nul. Ici on a :

$$\det(S) = a(a + 2b) - 3b^2$$

On en déduit donc que :

$$P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det(S) \neq 0 \Leftrightarrow 3b^2 - a^2 - 2ab \neq 0$$

b) On a :

$$3b^2 - a^2 - 2ab = 0 \Leftrightarrow 3(b^2 - a^2) - 2a(b - a) = 0 \Leftrightarrow (b - a)(3b + a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{ou} \\ a = -3b \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -3b \end{cases}$$

c) Il suffit de résoudre :

$$\begin{cases} aa' + 3bb' = 1 \\ a'b + b'(a + 2b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{a(a + 2b)}{(a - b)(a + 3b)} \\ b' = \frac{-3b^2}{(a - b)(a + 3b)} \end{cases}$$

On a donc :

$$P(a, b)^{-1} = P\left(\frac{a(a + 2b)}{(a - b)(a + 3b)}, \frac{-3b^2}{(a - b)(a + 3b)}\right)$$

Partie B : Diagonalisation et application

1) On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, P(a, b) = bP(1, 1) + (a - b)P(1, 0)$$

b) On peut appliquer l'algorithme du pivot de Gauss ou bien résoudre le système :

$$Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ -x + t = b \\ -y + t = c \\ -z + t = d \end{cases}$$

Ainsi en additionnant toutes les lignes on trouve

$$\begin{cases} t = \frac{1}{4}(a + b + c + b) \\ x = \frac{1}{4}(a - 3b + c + d) \\ y = \frac{1}{4}(a + b - 3c + d) \\ z = \frac{1}{4}(a + b + c - 3d) \end{cases}$$

On a donc unicité de la solution donc Q est inversible et :

$$Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) On a :

$$D = Q^{-1}P(1,1)Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d) Il suffit de voir que :

$$\begin{aligned} P(a,b) &= bP(1,1) + (a-b)P(1,0) = bQDQ^{-1} + (a-b)QQ^{-1} \\ &= Q(bD + (a-b)I_4)Q^{-1} = QD_{a,b}Q^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } D_{a,b} = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3b \end{pmatrix}$$

2) a) On a :

$$\begin{cases} (f_1)' = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_2)' = 2f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_3)' = 2f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 2f_4 \\ (f_4)' = 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 \end{cases} \Leftrightarrow X' = P(3,2)X \Leftrightarrow X' = QD_{3,2}Q^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow Q^{-1}X' = D_{3,2}Q^{-1}X$$

$$\text{b) On pose } Y = Q^{-1}X = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$Y' = \frac{dY}{dt} = Q^{-1} \begin{pmatrix} (f_1)' \\ (f_2)' \\ (f_3)' \\ (f_4)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g_1)' \\ (g_2)' \\ (g_3)' \\ (g_4)' \end{pmatrix} = D_{3,2}Y$$

Par linéarité de la dérivation.

On a alors :

$$Y' = \begin{pmatrix} (g_1)' \\ (g_2)' \\ (g_3)' \\ (g_4)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (g_1)' = g_1 \\ (g_2)' = g_2 \\ (g_3)' = g_3 \\ (g_4)' = 9g_4 \end{cases}$$

c) On en déduit donc que :

$$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq 4} \in \mathbb{K}^4 \text{ tel que } \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} g_1(t) = \lambda_1 e^t \\ g_2(t) = \lambda_2 e^t \\ g_3(t) = \lambda_3 e^t \\ g_4(t) = \lambda_4 e^{9t} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \\ -g_1 + g_4 \\ -g_2 + g_4 \\ -g_3 + g_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_1(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) e^t + \lambda_4 e^{9t} \\ f_2(t) = (-\lambda_1) e^t + \lambda_4 e^{9t} \\ f_3(t) = -\lambda_2 e^t + \lambda_4 e^{9t} \\ f_4(t) = -\lambda_3 e^t + \lambda_4 e^{9t} \end{cases}$$

De plus on sait que :

$$\begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \\ f_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 = 2 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 3 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 4 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} (f_1)' = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_2)' = 2f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_3)' = 2f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 2f_4 \\ (f_4)' = 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 \end{cases} \text{ avec } \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \\ f_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_1(t) = -\frac{3}{2}e^t + \frac{5}{2}e^{9t} \\ f_2(t) = \left(-\frac{1}{2}\right)e^t + \frac{5}{2}e^{9t} \\ f_3(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{5}{2}e^{9t} \\ f_4(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{5}{2}e^{9t} \end{cases}$$

3) Méthode 1 : Avec la diagonalisation

Il suffit de voir que :

$$P(a, b) = QD_{a,b}Q^{-1}$$

On en déduit donc par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(a, b)^n = QD_{a,b}^n Q^{-1}$$

Or on sait que :

$$(D_{a,b})^n = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+3b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3b)^n \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, P(a, b)^n \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a-b)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a+3b)^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (a-b)^n & (a-b)^n & (a-b)^n & (a+3b)^n \\ -(a-b)^n & 0 & 0 & (a+3b)^n \\ 0 & -(a-b)^n & 0 & (a+3b)^n \\ 0 & 0 & -(a-b)^n & (a+3b)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3(a-b)^n + (a+3b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n \\ (a+3b)^n - (a-b)^n & 3(a-b)^n + (a+3b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n \\ (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - 3(a-b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n \\ (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - (a-b)^n & (a+3b)^n - 3(a-b)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} P(3(a-b)^n + (a+3b)^n, (a+3b)^n - (a-b)^n) \end{aligned}$$

Méthode 2 : Binôme

On sait que :

$$P(a, b) = bP(1, 1) + (a - b)I_4$$

Or on sait que $P(1, 1)$ et I_4 commutent donc on peut appliquer la formule du binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, [P(a, b)]^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k (P(1, 1))^k (a - b)^{n-k}$$

Or on démontre par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, (P(1, 1))^k = 4^{k-1} P(1, 1)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, [P(a, b)]^n = (a - b)^n P(1, 0) + \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (4b)^k (a - b)^{n-k} \right) P(1, 1)$$

Or on a :

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (4b)^k (a - b)^{n-k} = (a + 3b)^n - (a - b)^n$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, [P(a, b)]^n = \frac{1}{4} P(3(a - b)^n + (a + 3b)^n, (a + 3b)^n - (a - b)^n)$$

Méthode 3 : Par des suites.

On sait que le produit est stable sur $P_4(\mathbb{C})$. Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } P(a, b)^n = P(u_n, v_n)$$

Ainsi on calcule $P(a, b)^{n+1}$:

$$P(a, b)^{n+1} = P(u_n, v_n)P(a, b) = P(au_n + 3bv_n, av_n + bu_n + 2bv_n) = P(u_{n+1}, v_{n+1})$$

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = au_n + 3bv_n \\ v_{n+1} = bu_n + (a + 2b)v_n \end{cases}$$

Ensuite on peut soit utiliser une matrice 2×2 soit aller chercher u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n puis faire une suite linéaire récurrence d'ordre 2. Dans les deux cas on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{1}{4} (3(a - b)^n + (a + 3b)^n) \\ v_n = \frac{1}{4} ((a + 3b)^n - (a - b)^n) \end{cases}$$

Problème 2 : La fonction indicatrice d'Euler

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. On pose alors $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n premier avec n :

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{k \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tel que } \text{PGCD}(k; n) = 1\})$$

Cette fonction est appelée l'indicatrice d'Euler.

Le but de cet exercice est de démontrer que si la décomposition en nombre premier de $n = (p_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r}$, alors :

$$\varphi(n) = (p_1)^{\alpha_1-1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1)$$

Pour cela on pose :

$$\begin{aligned} P_n &= \{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \text{PGCD}(k; n) = 1\} \\ (P_n)^r &= \{k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket \text{ tel que } \text{PGCD}(k; n) = 1\} \end{aligned}$$

On pose de plus $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Partie A : Echauffement

- 1) Démontrer que $\varphi(10) = 4$.
- 2) Déterminer $\varphi(12)$.
- 3) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \neq \emptyset$.
- 4)
 - a) Démontrer que $107 \in \mathcal{P}$.
 - b) En déduire la valeur de $\varphi(107)$.
 - c) Déterminer la valeur de $\varphi(p)$ pour $p \in \mathcal{P}$.
 - d) Démontrer que :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

Partie B : La formule

Le but de cette partie est de démontrer que :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ PGCD}(m, n) = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

Pour cela on introduit :

$$A(m, n) = \{k \in \llbracket 1; mn \rrbracket \text{ tel que } \text{PGCD}(k, m) = 1\}$$

1) Déterminer $A(3; 5)$ puis $A(5; 3)$

2) a) Soient a et b deux entiers non nuls. On pose $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b . Démontrer que :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$$

b) En déduire l'égalité d'ensemble suivantes :

$$A(m, n) = \bigcup_{k \in (P_m)^r} \{\ell m + k ; 0 \leq \ell \leq n - 1\}$$

L'idée est ici de ranger les éléments de $A(m, n)$ en fonction du reste dans leur division euclidienne par m .

Dans toute la suite on définit :

$$\forall k \in (P_m)^r, B_k(m, n) = \{\ell m + k ; 0 \leq \ell \leq n - 1\}$$

3) a) Démontrer que :

$$a \in P_{nm} \Leftrightarrow a \in P_n \cap P_m$$

b) En déduire que :

$$(P_{nm})^r = \bigcup_{k \in (P_m)^r} B_k(m, n) \cap P_n$$

4) a) Démontrer que $5 \in (P_6)^r$ puis déterminer $B_5(6; 7)$.

b) Pour tout $k \in (P_m)^r$, on pose l'application $f_{(k, m, n)}$ suivante :

$$f_{(k, m, n)} : \begin{cases} B_k(m, n) \rightarrow \llbracket 0; n - 1 \rrbracket \\ x \mapsto \text{Rest}(x, n) \end{cases} \text{ avec } \text{Rest}(x, n) \text{ le reste de la division euclidienne de } x \text{ par } n$$

Déterminer $f_{(5, 6, 7)}(17)$

c) Démontrer, par la méthode de votre choix, que :

$$\begin{cases} a|bc \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow a|c$$

d) En déduire que $f(k, m, n)$ est injective.

Remarque : Dans une prochaine leçon on verra que comme l'application est injective et que les ensembles ont le même nombre d'éléments, alors l'application est bijective. C'est même une équivalence !

d) En déduire que le nombre d'éléments de $B_k(m, n) \cap P_n$ est exactement $\varphi(n)$.

e) En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$.

5) Conclure par récurrence que :

$$\varphi((p_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r}) = (p_1)^{\alpha_1-1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1)$$

Partie A : Echauffement

1) On sait que :

$$(P_{10})^r = \{1, 3, 7, 9\}$$

Ainsi $\varphi(10) = 4$.

2) De même on a :

$$(P_{12})^r = \{1, 5, 7, 11\}$$

On a donc :

$$\varphi(12) = 4$$

3) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, PGCD(1, n) = 1$ ainsi on en déduit que $1 \in P_n$.

4) a) On sait que $\sqrt{107} \in]10; 11[$

De plus on sait que $107 = 2 \times 53 + 1, 107 = 3 \times 35 + 2, 107 = 5 \times 21 + 2, 107 = 7 \times 15 + 2$

Ainsi aucun nombre premier inférieur à la racine carrée de 107 ne divise 107. Donc **107 est premier.**

b) On en déduit donc que $\varphi(107) = 106$ car 107 étant premier, tout nombre plus petit que lui est premier.

c) On a pour la même raison que précédemment : **$\varphi(p) = p - 1$**

d) On sait que :

$$PGCD(n, p^\alpha) = 1 \Leftrightarrow v_p(n) = 0$$

Regardons les nombres inférieurs à p^α qui possèdent p dans leur décomposition en nombre premier :

$$(\overline{P_n})^r \cap \llbracket 1; p^\alpha \rrbracket = \{p, 2p, 3p, \dots, p^{\alpha-1}p\}$$

Ainsi on a $p^{\alpha-1}$ nombres non premier avec p^α dans $\llbracket 1; p^\alpha \rrbracket$. On en déduit donc que :

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

Partie B : La formule

1) On a :

$$A(3; 5) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$$

De même on a :

$$A(5, 3) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$$

2) a) C'est une démonstration de cours.

On sait que si d divise a et b , alors $d|a - bq$ donc $d|r$.

De même si d divise b et r alors $d|a$. Ainsi l'ensemble des diviseurs de a et b est l'ensemble des diviseurs de b et r . Ainsi le plus grand est le même :

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r)$$

b) Soit $x \in A(m, n)$. On effectue la division euclidienne de x par m :

$$\exists (\ell, r) \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \times \llbracket 0; m-1 \rrbracket \text{ tel que } x = \ell m + r$$

Or on sait que $PGCD(x, m) = 1$, on en déduit donc d'après la question précédente que $r \in (P_m)^r$.

Ainsi :

$$\exists r \in (P_m)^r, \ell \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \text{ tel que } x = \ell m + k$$

Ainsi on a :

$$A(m, n) \subset \bigcup_{k \in (P_m)^r} \{\ell m + k ; 0 \leq \ell \leq n-1\}$$

De même on a :

$$x \in \bigcup_{k \in (P_m)^r} \{\ell m + k ; 0 \leq \ell \leq n-1\} \Rightarrow \exists r \in (P_m)^r \text{ tel que } x = \ell m + r$$

Ainsi on a :

$$x \in \llbracket 1; nm \rrbracket \text{ et } PGCD(x, m) = PGCD(m, r) = 1 \text{ car } r \in (P_m)^r$$

3) a) On a :

$$\begin{aligned} a \in P_{nm} &\Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) \times v_p(nm) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a) (v_p(n) + v_p(m)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a)v_p(n) + v_p(a)v_p(m) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}, v_p(a)v_p(n) = 0 = v_p(a)v_p(m) \text{ car } v_p(n) \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow PGCD(a, n) = PGCD(a, m) = 1 \\ &\Leftrightarrow a \in P_n \cap P_m \end{aligned}$$

b) On sait d'après la question précédente que :

$a \in (P_{nm})^r$ alors a est premier avec m et n , a étant dans l'ensemble $\llbracket 1; mn \rrbracket$. On a donc :

$$\begin{aligned} a \in (P_{nm})^r &\Leftrightarrow a \in A(m, n) \cap P_n \Leftrightarrow a \in \left(\bigcup_{k \in (P_m)^r} B_k(m, n) \right) \cap P_n \Leftrightarrow a \\ &\in \bigcup_{k \in (P_m)^r} (B_k(m, n) \cap P_n) \end{aligned}$$

4) a) On a :

$$PGCD(5, 6) = 1 \text{ et } 5 \leq 6$$

Ainsi on a $5 \in (P_6)^r$. On a donc :

$$B_5(6; 7) = \{5, 11, 17, 23, 29, 35, 41\}$$

b) On sait que $17 = 6 \times 2 + 5$

De plus on sait que :

$$17 = 7 \times 2 + 3$$

On en déduit donc que :

$$f_{(5,6,7)}(17) = 3$$

c) On a :

$$a|bc \Leftrightarrow v_p(a) \leq v_p(b) + v_p(c), \forall p \in \mathcal{P}$$

Or on sait que $PGCD(a, b) = 1$ donc $\forall p \in \mathcal{P}$ tel que $v_p(a) \geq 1, v_p(b) = 0$.

On en déduit donc que :

$$\forall p \in \mathcal{P} \text{ tel que } v_p(a) \geq 1, v_p(a) \leq v_p(c)$$

Ainsi $a|c$.

d) Soit $(x, x') \in (B_k(m, n))^2$. On suppose que :

$$f_{(k,n,m)}(x) = f_{(k,n,m)}(x') = r$$

Ainsi :

$$\exists (q, q') \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } x = qn + r \text{ et } x' = q'n + r$$

On en déduit donc que :

$$x - x' = (q - q')n$$

De plus on a :

$$\exists (\ell, \ell') \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket^2 \text{ tel que } x = \ell m + r \text{ et } x' = \ell' m + r$$

On a donc :

$$x - x' = (\ell - \ell')m = (q - q')n$$

Ainsi $n|(\ell - \ell')m$. Or $PGCD(m, n) = 1$. On en déduit donc que :

$$n|(\ell - \ell')$$

Or on sait que :

$$(\ell - \ell') \in \llbracket -(n-1); n-1 \rrbracket$$

On en déduit donc que $\ell - \ell' = 0$ donc $\mathbf{x = x'}$ donc l'application est injective.

Comme $B_k(m, n)$ admet n éléments, tout comme $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On en déduit donc que $\mathbf{f_{k,m,n}}$ est bijective.

e) On sait que $f_{k,m,n}$ est bijective donc :

$f_{k,m,n}|_{B_k(m,n) \cap P_n} : B_k(m, n) \cap P_n \rightarrow (P_n)^r$ est injective. De plus si $r \in (P_n)^r \subset \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, alors r admet un antécédent x dans $B_k(m, n)$. Mais alors $PGCD(x, n) = 1$ d'après 2) a) et $x \in B_k(m, n)$ donc $PGCD(x, m) = 1$.

D'après la question 3) a). Ainsi on a $f_{k,m,n}|_{B_k(m,n) \cap P_n} : B_k(m, n) \cap P_n \rightarrow (P_n)^r$ est bijective.

Donc les deux ensembles ont le même nombre d'éléments, $\varphi(n)$.

e) On a vu que :

$$(P_{nm})^r = \bigcup_{k \in (P_m)^r} (B_k(m, n) \cap P_n)$$

Par unicité de la division euclidienne, on en déduit que

$$\varphi(nm) = \sum_{k \in (P_m)^r} \text{Card}(B_k(m, n) \cap P_n) = \sum_{k \in (P_m)^r} \varphi(n) = \varphi(n) \sum_{k \in (P_m)^r} 1 = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

5) Attention, ici c'est une récurrence sur le nombre de premiers dans la décomposition en nombres premier. On pose :

$$\forall n \geq 2, \mathcal{P}(n) = \{p \in \mathcal{P}, \text{tel que } v_p(n) > 0\}$$

De plus on pose :

$$\mathbf{p_n = Card(\mathcal{P}(n))}$$

Initialisation : $p_n = 1$

C'est la question 4) d).

Hérédité : Soit p_n un entier naturel non nul. On suppose que :

$$\varphi((p_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (p_{p_n})^{\alpha_{p_n}}) = (p_1)^{\alpha_1-1} \times \dots \times (p_{p_n})^{\alpha_{p_n}-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_{p_n} - 1)$$

On a alors :

$$\varphi\left(\underbrace{(p_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_{p_n}}}_{=\alpha_n} \times (p_{p_n+1})^{\alpha_{p_n+1}}\right) = \varphi(\alpha_n \times (p_{p_n+1})^{\alpha_{p_n+1}})$$

Or on sait que $PGCD(\alpha_n, (p_{p_n+1})^{\alpha_{p_n+1}}) = 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_n \times (p_{p_n+1})^{\alpha_{p_n+1}}) &= \varphi(\alpha_n) \times \varphi((p_{p_n+1})^{\alpha_{p_n+1}}) \\ &= (p_1)^{\alpha_1-1} \times \dots \times (p_{p_n})^{\alpha_{p_n}-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_{p_n} - 1) (p_{p_n+1})^{\alpha_{p_n+1}-1} (p_{p_n+1} - 1) \end{aligned}$$

Donc la proposition est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

$$\varphi((p_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r}) = (p_1)^{\alpha_1-1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1)$$