

DS n°5

Exercice 1 : Une équation fonctionnelle

L'objectif de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et vérifiant la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) \times f(y) \quad (*)$$

- 1) Déterminer les fonctions constantes vérifiant (*).
- 2) Démontrer que si $f(0) \neq 0$, $f(0) = 1$.
- 3) Montrer que f est paire.
- 4) Dans cette question on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
On pose de plus la suite (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{x_0}{\sqrt{2^n}}$$

- a) Montrer que la suite $(f(x_n))$ est constante.
- b) En déduire que si $f(0) \neq 0$, f ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$.
- c) En déduire que :

$$f(0) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

- 5) Dans cette question on suppose que $f(0) \neq 0$. On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = \ln(f(\sqrt{x}))$$

- a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
- b) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, g(x + y) = g(x) + g(y)$$

- c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, g(nx) = ng(x)$$

- d) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}^+, g(x) = xg(1)$$

- e) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = xg(1)$$

- 6) Déterminer alors toutes les solutions vérifiant (*) et continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Tout doux !

On pose l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

- 1) Démontrer que :

$$\forall t \in [0; \sqrt{n}], \exists ! u \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } t = \sqrt{n} \cos(u)$$

- 2) En déduire à l'aide d'un changement de variable que :

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u) du$$

- 3) A l'aide d'une IPP, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = W_{n-1} - \frac{1}{2n} W_n$$

- 4) En déduire la valeur de I_n en fonction de n .

Problème 1 : Les matrices pliables de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$

Grâce à Elisabeth et Baptiste, je vous propose ce joli problème.

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. On définit dans tout ce problème les matrices pliables de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ par :

$$P(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}$$

On note $P_4(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices pliables de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$:

$$P_4(\mathbb{C}) = \{P(a, b), (a, b) \in \mathbb{C}^2\}$$

Partie A : Echauffement

- 1) Montrer que I_4 est pliable.
- 2) Démontrer que $P_4(\mathbb{C})$ est stable par combinaison linéaire. C'est-à-dire que :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \forall (M_1, M_2) \in (P_4(\mathbb{C}))^2, \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in P_4(\mathbb{C})$$
- 3) a) Démontrer que $P_4(\mathbb{C})$ est stable par produit. C'est-à-dire que :

$$\forall (M_1, M_2) \in (P_4(\mathbb{C}))^2, M_1 \times M_2 \in P_4(\mathbb{C})$$
 b) Démontrer que le produit sur $P_4(\mathbb{C})$ est commutatif.
- 4) a) Démontrer que :

$$P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow 3b^2 - 2ab - a^2 \neq 0$$

Indication : On pourra effectuer le produit $P(a, b) \times P(a', b')$

b) En déduire que :

$$P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq -3b \end{cases}$$

c) Si $P(a, b) \in GL_4(\mathbb{C})$, déterminer $(a', b') \in \mathbb{C}^2$ tel que $P(a', b') = [P(a, b)]^{-1}$

Partie B : Diagonalisation et application

On rappelle qu'une matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice Q inversible et une matrice D diagonale telle que :

$$A = QDQ^{-1}$$

Nous allons montrer ici que toute matrice de $P_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

- 1) a) Démontrer que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \exists! (\lambda_{a,b}, \mu_{a,b}) \in \mathbb{C}^2 \text{ tel que } P(a, b) = \lambda_{a,b}P(1,1) + \mu_{a,b}P(1,0)$$
 b) On pose :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $Q \in GL_4(\mathbb{C})$ puis déterminer son inverse.

c) Déterminer la matrice diagonale D telle que :

$$P(1,1) = QDQ^{-1}$$

d) En déduire que toute matrice de $P_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Dans toute la suite de ce problème on pose :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, D_{a,b} \text{ la matrice diagonale de } \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) \text{ tel que :}$$

$$P(a, b) = Q \times D_{a,b} \times (Q)^{-1}$$

2) Dans cette question on dispose de quatre fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} (f_1)' = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_2)' = 2f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_3)' = 2f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 2f_4 \\ (f_4)' = 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 \end{cases}$$

De plus on pose :

$$X = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} (f_1)'(t) \\ (f_2)'(t) \\ (f_3)'(t) \\ (f_4)'(t) \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que :

$$X' = P(3,2)X \Leftrightarrow (Q)^{-1}X' = D_{3,2}(Q)^{-1}X$$

b) On pose :

$$Y = (Q)^{-1}X = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

Montrer que :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket, (g_i)' = g_i \\ (g_4)' = 9g_4 \end{cases}$$

c) En déduire les solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (f_1)' = 3f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_2)' = 2f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 2f_4 \\ (f_3)' = 2f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 2f_4 \\ (f_4)' = 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + 3f_4 \end{cases} \text{ avec } \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \\ f_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3) Calculer par la méthode de votre choix :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(a, b)^n$$

Problème 2 : La fonction indicatrice d'Euler

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. On pose alors $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n premier avec n :

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ tel que } \text{PGCD}(i; n) = 1\})$$

Cette fonction est appelée l'indicatrice d'Euler.

Le but de cet exercice est de démontrer que si la décomposition en nombre premier de $n = (p_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r}$, alors :

$$\varphi(n) = (p_1)^{\alpha_1-1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1)$$

Pour cela on pose :

$$\begin{aligned} P_n &= \{i \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \text{PGCD}(i; n) = 1\} \\ (P_n)^r &= \{i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \text{ tel que } \text{PGCD}(i; n) = 1\} \end{aligned}$$

On pose de plus $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Partie A : Echauffement

- 1) Démontrer que $\varphi(10) = 4$.
- 2) Déterminer $\varphi(12)$.
- 3) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n \neq \emptyset$.
- 4)
 - a) Démontrer que $107 \in \mathcal{P}$.
 - b) En déduire la valeur de $\varphi(107)$.
 - c) Déterminer la valeur de $\varphi(p)$ pour $p \in \mathcal{P}$.
 - d) Démontrer que :

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^*, \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

Partie B : La formule

Le but de cette partie est de démontrer que :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \text{ PGCD}(m, n) = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

Pour cela on introduit :

$$A(m, n) = \{k \in \llbracket 1; mn \rrbracket \text{ tel que } \text{PGCD}(k, m) = 1\}$$

Dans toute la suite on prend m et n deux nombres premiers entre eux.

1) Déterminer $A(3; 5)$ puis $A(5; 3)$

2) a) Soient a et b deux entiers non nuls. On pose $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b . Démontrer que :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$$

b) En déduire l'égalité d'ensemble suivantes :

$$A(m, n) = \bigcup_{k \in (P_m)^r} \{\ell m + k ; 0 \leq \ell \leq n - 1\}$$

L'idée est ici de ranger les éléments de $A(m, n)$ en fonction du reste dans leur division euclidienne par m .

Dans toute la suite on définit :

$$\forall k \in (P_m)^r, B_k(m, n) = \{\ell m + k ; 0 \leq \ell \leq n - 1\}$$

3) a) Démontrer que :

$$a \in P_{nm} \Leftrightarrow a \in P_n \cap P_m$$

b) En déduire que :

$$(P_{nm})^r = \bigcup_{k \in (P_m)^r} B_k(m, n) \cap P_n$$

4) a) Démontrer que $5 \in (P_6)^r$ puis déterminer $B_5(6; 7)$.

b) Pour tout $k \in (P_m)^r$, on pose l'application $f_{(k, m, n)}$ suivante :

$$f_{(k, m, n)} : \begin{cases} B_k(m, n) \rightarrow \llbracket 0; n - 1 \rrbracket \\ x \mapsto \text{Rest}(x, n) \end{cases} \text{ avec } \text{Rest}(x, n) \text{ le reste de la division euclidienne de } x \text{ par } n$$

Déterminer $f_{(5, 6, 7)}(17)$

c) Démontrer, par la méthode de votre choix, que :

$$\begin{cases} a|bc \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow a|c$$

d) En déduire que $f_{(k, m, n)}$ est injective.

Remarque : Dans une prochaine leçon on verra que comme l'application est injective et que les ensembles ont le même nombre d'éléments, alors l'application est bijective. C'est même une équivalence !

e) En déduire que le nombre d'éléments de $B_k(m, n) \cap P_n$ est exactement $\varphi(n)$.

f) En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m) \times \varphi(n)$.

5) Conclure par récurrence que :

$$\varphi((p_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r}) = (p_1)^{\alpha_1 - 1} \times \dots \times (p_r)^{\alpha_r - 1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1)$$