

Chapitre 22 : Séries numériques

Partie A : Généralités

Dans tout ce chapitre (comme d'hab en fait!), $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Une somme de nombre

a) Une somme infinie ?

Définition : Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n , la suite $(S_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

On note alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n ; \sum_{n \geq 0} u_n \quad \text{ou encore} \quad \sum u_n$$

Exemple I.a.1 : Déterminer une expression en fonction de n de la série :

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Définition : On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admet une limite finie dans $\mathbb{K}$. On note alors :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$$

Dans le cas contraire on dit que la série est divergente.

Exemple I.a.2 : Démontrer la convergence de la série :

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exemple I.a.3 : Déterminer une série qui diverge.

Définition (Somme partielle) : Si la série $\sum u_n$ converge on pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, S_n &= \sum_{k=0}^n u_k \\ \forall n \in \mathbb{N}, R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \end{aligned}$$

S_n est appelé la somme partielle d'ordre n ou n -ième somme partielle.

R_n est appelé reste partiel d'ordre n ou n -ième reste partiel.

Exemple I.a.4 : Déterminer le reste partiel de la série :

$$\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Propriété I.a.5 : On a :

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$$

Remarque : Le but de ce chapitre est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur le général u_n pour prouver la convergence ou la divergence des séries $\sum u_n$. On parle de nature de la série. Déterminer la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Application I.a.6 : Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

b) Espace vectoriel

Propriété I.b.1 : On pose :

$$E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum u_n\}$$

Alors E est un espace vectoriel.

Application I.b.2 : Montrer que la série de terme général $u_n = 10^{-n-2} + 5 \times 0,4^n$ converge et déterminer sa limite.

ATTENTION : On peut avoir deux séries de termes générales u_n et v_n qui divergent alors que la suite $u_n + v_n$ converge. On ne peut donc pas scinder une série en deux avant de vérifier que les deux séries convergent. C'est une erreur classique que je ne veux pas voir !!!

Exemple I.b.3 : Déterminer deux suites de termes générales u_n et v_n qui divergent alors que la suite $u_n + v_n$ converge.

Propriété I.b.4 : On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de ses termes.

II) Condition nécessaire et suffisante ?

a) Une condition nécessaire !

Propriété II.a.1 : On a l'implication suivante (qui n'est PAS UNE EQUIVALENCE) :

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Application II.a.2 : La série $\sum (-1)^n$ diverge.

Définition : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Propriété II.a.3 : La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

b) Séries géométriques

Propriété II.b.1 : La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. On a alors :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Application II.b.2 (Paradoxe de Zénon) : On a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

Application II.b.3 : On a :

$$0,9999999 \dots = 1$$