

Chapitre 23.B : Séries Numériques
Série à termes positives et absolu convergence

I) Théorèmes de comparaison

a) Majoration des sommes partielles

Propriété I.a.1 : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique positive. On a alors :

(1) La série $(\sum u_n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée :

$$\left(\sum u_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k < M$$

(2) Si la série $\sum u_n$ diverge alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$$

Application I.a.2 : Démontrer que la série $(\sum e^{-n^2})$ converge.

Propriété I.a.3 : Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites numériques **positives** telles que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$

On a alors :

(1) $\left(\sum v_n\right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum u_n\right) \text{ converge}$

(2) $\left(\sum u_n\right) \text{ diverge} \Rightarrow \left(\sum v_n\right) \text{ diverge}$

Application I.a.4 : Démontrer la divergence de la série :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Remarque : Le résultat précédent reste vrai même si la double inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ n'est vraie à partir d'un certain rang.

Application I.a.5 : Démontrer la convergence de la série :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$$

Application I.a.6 : Soit $(\sum u_n)$ une série convergente à terme positif. Montrer que :

$$\forall \alpha \geq 1, \left(\sum (u_n)^\alpha\right) \text{ converge}$$

b) Analyse asymptotique

Propriété I.b.1 : Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites numériques positives telles que $u_n = O(v_n)$. On a alors :

(1) $\left(\sum v_n\right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum u_n\right) \text{ converge}$

(2) $\left(\sum u_n\right) \text{ diverge} \Rightarrow \left(\sum v_n\right) \text{ diverge}$

Application I.b.2 : Démontrer la convergence de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + \dots + n}$$

Propriété I.b.3 : Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites numériques **positives** telles que $u_n \sim v_n$. Alors les séries $(\sum v_n)$ et $(\sum u_n)$ sont de même nature.

Application I.b.4 : Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

II) Comparaison série-intégrale

a) Présentation

Propriété II.a.1 : Soit $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **positive et décroissante**. On a alors :

$$\left(\sum f(n)\right) \text{ et } \left(\int_0^n f(t)dt\right) \text{ sont de même nature}$$

Remarque : Il est souvent judicieux de refaire la démonstration précédente dans chaque cas particulier.

Application II.a.2 : Démontrer la divergence de la série :

$$\left(\sum \frac{1}{n \ln(n)}\right)$$

Application II.a.3 : Démontrer la convergence de la série :

$$\left(\sum \frac{1}{n \ln^2(n)}\right)$$

Remarque : On peut aussi utiliser cette comparaison pour déterminer un équivalent de la série $\sum f(n)$

Application II.a.4 : Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

b) Application : le critère de Riemann

Définition : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle somme de Riemann la série :

$$\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Propriété II.b.1 (critère de Riemann) : On a :

$$\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Application II.b.2 : Déterminer la nature de la série :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 5n + 3}{n^5 + 3n^2 + 2n + 1}\right)$$

III) Comparaison particulière

a) Critère de d'Alembert

Propriété III.a.1 : Soit $(\sum u_n)$ une série à termes positifs. On suppose que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \geq 0$$

On a alors :

$$(1) \ell < 1 \Rightarrow \left(\sum u_n \right) \text{ converge}$$

$$(2) \ell > 1 \Rightarrow \left(\sum u_n \right) \text{ diverge}$$

$$(3) \ell = 1 \Rightarrow \text{On ne peut rien conclure.}$$

Application III.a.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{\ln(n)}{2^n} \right)$$

Application III.a.3 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{2^n}{n!} \right)$$

b) Comparaison avec les séries de Riemann

Propriété III.b.1 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On a :

$$u_n \sim \frac{c}{n^\alpha}; c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n \text{ converge si } \alpha > 1 \\ \sum u_n \text{ diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Application III.b.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum_{n \geq} \frac{n^2 + 5n + 3}{3n^3 + 2n + 1} \right)$$

Propriété III.b.3 : Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On a :

$$(1) \lim_n n^\alpha u_n = 0, \alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

$$(2) \lim_n n u_n = +\infty \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

Application III.b.4 : Déterminer la nature de la série :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} \right)$$

IV) Série absolument convergente

a) Généralités

Définition : On dit qu'une série $(\sum u_n)$ est absolument convergente si la série $(\sum |u_n|)$ converge.

Exemple IV.a.1 : Démontrer que la série :

$$\left(\sum \left(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \right)^n \right)$$

Est absolument convergente et déterminer sa valeur.

Exemple IV.a.2 : Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que la série suivante est absolument convergente :

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

b) Condition suffisante

Propriété IV.b.1 : Toute série absolument convergente est convergente.

Application I.b.2 : Démontrer la convergence de :

$$\left(\sum \frac{\cos(n)}{n^2} \right)$$

Remarque : La propriété I.b.1 est une condition suffisante mais pas nécessaire.

Exemple IV.b.3 : Montrer que la série est convergente mais pas absolument convergente.

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

c) Inégalité triangulaire

Propriété IV.c.1 : Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On a :

$$(1) \left(\sum u_n \right) \text{ converge absolument} \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

$$(2) \left(\sum u_n \right) \text{ et } \left(\sum v_n \right) \text{ convergent absolument} \Rightarrow \forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{C}^2 \left(\sum (\lambda u_n + \mu v_n) \right) \text{ converge absolument et}$$

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) \right| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$$

Remarque : On a : $E = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum |u_n| \text{ converge}\}$ un espace vectoriel.

Application IV.c.2 : Montrer la convergence de :

$$\left(\sum \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \right)^n + \frac{3e^{in}}{n^2} \right) \right)$$

d) Notation de Landau

Propriété IV.d.1 : Soit $(\sum u_n)$ une série à valeur dans $\mathbb{K}$ et $(\sum v_n)$ une série à terme positif. On a :

$$\begin{cases} u_n = O(v_n) \\ (\sum v_n) \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow (\sum u_n) \text{ converge}$$

Application IV.d.2 : Démontrer la convergence de la série :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2 + \cos(n)} \right)$$