

Fiche TD 22 : Séries numériques

Partie A : Généralités

Exercice A.1 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1}$$

Exercice A.2 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

Exercice A.3 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Exercice A.4 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2}$$

Exercice A.5 : Déterminer la nature de :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\text{sh}(n)}{\text{ch}(n)}$$

Exercice A.6 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)}{\cos \left(\frac{1}{n} \right) \cos \left(\frac{1}{n+1} \right)}$$

Partie B : Séries à termes positifs

Exercice B.1 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A) } \sum_{n \geq 2} \frac{n}{n^2 + 1} ; \text{ B) } \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - \ln(n)} ; \text{ C) } \sum_{n \geq 2} n \sin \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Exercice B.2 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A) } \sum_{n \geq 0} \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} ; \text{ B) } \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n} ; \text{ C) } \sum_{n \geq 1} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) (\ln(n))^{1000}$$

Exercice B.3 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A) } \sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n) n^2} ; \text{ B) } \sum_{n \geq 1} \frac{\arctan(n)}{n^2} ; \text{ C) } \sum_{n \geq 1} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n - e \right)$$

Exercice B.4 : a) Démontrer la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \arctan \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

b) Montrer que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+, \arctan(u) - \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u - v}{1 + uv}\right)$$

c) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

Exercice B.5 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n!}$$

Exercice B.6 : Soit $\alpha > 1$. Démontrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{\alpha - 1}$$

Exercice B.7 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercice B.8 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

Exercice B.9 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Exercice B.10 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n \ln^3(n)}$$

Partie C : Séries à termes quelconques

Exercice C.1 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{e^{in}}{n^4}\right)$$

Exercice C.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right)$$

Exercice C.3 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)$$

Exercice C.4 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}\right)$$

Partie D : Un peu plus dur

Exercice B.1 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \sin \left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} \right) \right)$$

Exercice B.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n} \right)$$

Exercice B.3 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \right)$$

Exercice B.4 : a) Soit x réel et n un entier naturel. Montrer que :

$$\left| \arctan(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que la série suivante converge :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

Puis calculer sa somme.

c) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$