

TD 21 : Espaces vectoriels de dimension finie

Partie A : Base d'un ev

Exercice A.1 : a) Montrer que $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,1,1); e_2 = (2,1,1); e_3 = (2,1,2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 b) Déterminer les coordonnées de $e = (9,6,7)$ dans la base $\mathcal{B}$.
 c) Déterminer les coordonnées de $e = (a, b, c)$ dans la base $\mathcal{B}$.

a) On sait que $\# \mathcal{B} = 3$. Il suffit donc de montrer que la famille est libre. On résout :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Méthode 1 : De $L_3 - L_2 \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre, de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2 : On peut aussi poser le système sous forme de matrice !

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On sait que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution (toujours dans un espace vectoriel !!!). Il faut par contre voir si c'est la seule solution.

C'est-à-dire qu'il faut si la matrice : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible ou non ? Il faut donc déterminer le nombre de pivots de P .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow -L_3]{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots. On a donc une unique solution qui est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille est donc **libre**.

Remarque : Vous allez me dire que cette méthode est plus longue ! C'est vrai mais vous allez voir ensuite qu'elle peut avoir son utilité, et pour d'autres chapitres également !

2) On sait que la famille $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,1,1); e_2 = (2,1,1); e_3 = (2,1,2)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ car c'est une base. On sait donc que :

$$\begin{aligned} \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, e = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 9 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Là encore il y a plusieurs méthodes.

Méthode 1 : On voit la solution directement :

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$$

Méthode 2 : On résout le système par substitution :

$$L_3 - L_2 \Rightarrow \lambda_3 = 1 \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 7 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

Méthode 3 : On résout le système sous forme matriciel :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 9 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 6 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

On peut alors chercher l'inverse de P grâce à la méthode du pivot de Gauss !

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 - L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 - L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 - 2L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
--	--

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette méthode semble plus « fastidieuse » mais en fait c'est pratique pour la question suivante :

3) On pose

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = c \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a + 2b \\ a - c \\ -b + c \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On note alors :

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -a + 2b \\ a - c \\ -b + c \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$$

Exercice A.2 : On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; x + t = y - 2z \right\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et déterminer une base de F.

Pour montrer que F est un espace vectoriel, il faut montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^4$.

i) On voit que $0_{\mathbb{R}^4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$

ii) On a :

$$\forall (e_1, e_2) \in F^2, e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ t_1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \begin{cases} x_1 + t_1 = y_1 - 2z_1 \\ x_2 + t_2 = y_2 - 2z_2 \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda e_1 + \mu e_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \\ \lambda t_1 + \mu t_2 \end{pmatrix}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda t_1 + \mu t_2) &= \lambda(x_1 + t_1) + \mu(x_2 + t_2) \\ &= \lambda(y_1 - 2z_1) + \mu(y_2 - 2z_2) \\ &= (\lambda y_1 + \mu y_2) - 2(\lambda z_1 + \mu z_2)\end{aligned}$$

Donc : $\lambda e_1 + \mu e_2 \in F$. Donc F est un sev de $\mathbb{R}^4$, c'est donc un espace vectoriel.

Il reste à déterminer une famille **libre** et **génératrice** de F.

Intuitivement on peut voir que F est de dimension 3. En effet $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, cependant ici on impose une condition sur les coordonnées d'un vecteur $e = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$, à savoir $x + t + 2z = y$. On a donc plus que trois degrés de liberté.

On peut donc conjecturer que :

$$\dim(F) = 3$$

A présent nous allons le démontrer par le calcul. On voit déjà que $F \neq \mathbb{R}^4$ car le vecteur :

$$e = (1, 0, 0, 0) \notin F$$

Donc : $\dim(F) \leq 3$.

Pour montrer que $\dim(F) = 3$ il faut trouver trois vecteurs libres de F.

On pose :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ libre dans $\mathbb{R}^4$. Pour démontrer cela il suffit de résoudre :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0 = \lambda_2 = \lambda_3$$

Donc la famille est **libre**.

On a donc :

$$\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est libre} \\ \text{Card}(\mathcal{B}) = 3 \Rightarrow \dim(F) = 3 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ \dim(F) \leq 3 \end{cases}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F.

Remarque ; Ici on a pas eu besoin de montrer qu'elle était **génératrice**. On pourrait le montrer mais cela est plus fastidieux !!

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow x = y - 2z - t$$

Or on a :

$$\forall (y, z, t) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} y - 2z - t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-z) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est donc **génératrice**, mais ici c'est inutile de le démontrer !

Exercice A.3 : Déterminer pour quelles valeurs de t la famille : $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, t); e_2 = (1, 1, t); e_3 = (t, 0, 1)\}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Il suffit de résoudre :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + t\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + t\lambda_3 = 0 \\ t\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il faut voir pour quelle(s) valeur(s) de t cette matrice est inversible (donc admet trois pivots !).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - tL_1}]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - t^2 \end{pmatrix}$$

On veut donc $t^2 \neq 1$.

Donc pour $t \notin \{-1; 1\}$, la famille est **libre**.

Si $t = 1$ on a :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$$

Si $t = -1$ on a :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_3$$

Donc la famille n'est pas **libre** !

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=Pmhg9aR10aA>

Exercice A.4 : a) On pose $\mathcal{B} = \{e_1 = (1, -1, i); e_2 = (-1, i, 1); e_3 = (i, 1, -1)\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ forme une base de $\mathbb{C}^3$.

b) Déterminer les coordonnées de $v = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Il suffit de voir que la famille est **libre** car $\#\mathcal{B} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

On résout :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ i\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & i & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut alors travailler sur le système ou sur la matrice.

Si on travaille sur la matrice on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ -1 & i & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - iL_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & -1+i & 1+i \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{-1+i}L_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - (1+i)L_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & i \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix}$$

On a donc 3 pivots, la matrice est inversible donc la famille est libre car le système admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc une famille **libre** de **3** vecteurs dans un espace vectoriel de **dimension 3**, c'est donc une **base**.

On n'a pas besoin de démontrer qu'elle est génératrice !

b) Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ i \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3 = 1+i \\ -\lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 = 1-i \\ i\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = i \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1-i}{2}, \lambda_3 = \frac{1-3i}{2}$$

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=G-Xa2ZmQUwQ>

Exercice A.5 : Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{B}_a = ((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

b) Soit $0 \leq k \leq n$. Déterminer les coordonnées de $P_k = X^k$ dans cette base.

c) Déterminer les coordonnées de n'importe quel polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

a) On sait que :

$$\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$$

De plus :

$\mathcal{B}_a = ((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est **libre** (famille de **polynômes échelonnés**) et de cardinal $n + 1$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Vidéo : <https://www.youtube.com/watch?v=FZf39IWtpZw>

b) Il suffit de résoudre :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, X^k = \sum_{i=0}^n \lambda_i (X-a)^i$$

$$\Leftrightarrow X^k = \lambda_0 + \lambda_1 (X-a) + \lambda_2 (X-a)^2 + \dots + \lambda_k (X-a)^k + \dots + \lambda_n (X-a)^n$$

On peut déjà regarder ce qu'il se passe pour les premiers degrés :

$$\begin{cases} 1 = (X-a)^0 \\ X = (X-a) + a \times 1 \\ X^2 = (X-a)^2 + 2a(X-a) + a^2 \\ X^3 = (X-a)^3 + 3a(X-a)^2 + 3a^2(X-a) + a^3 \\ X^4 = (X-a)^4 + 4a(X-a)^3 + 6a^2(X-a)^2 + 4a^3(X-a) + a^4 \end{cases}$$

On a :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, X^k = (X-a+a)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} (X-a)^i$$

On a donc :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, X^k = \sum_{i=0}^n \lambda_i (X-a)^i \text{ avec } \lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i > k \\ \binom{k}{i} a^{k-i} & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie B : Dimension

Exercice B.1 : On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = P(2)\}$. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Intuitivement on peut voir que $\dim(F) = 3$. En effet on sait que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ et ici on nous impose une condition : $P(1) = P(2)$. On peut donc en déduire que $\dim(F) = 3$. Mais nous allons le prouver correctement !

1) $\dim(F) \leq 3$

On sait que :

$$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 \text{ et } P(X) = X \notin F$$

On en déduit donc que $F \neq \mathbb{R}_3[X]$. Donc $\dim(F) \leq 3$.

2) $\dim(F) \geq 3$

Il faut trouver une famille libre de F de cardinal 3.

On pose :

$$P_1(X) = 1, P_2(X) = (X-1)(X-2) \text{ et } P_3(X) = (X-1)^2(X-2)$$

La famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est libre car famille de polynômes échelonnés. De plus $\#\mathcal{B} = 3$. Donc $\dim(F) \geq 3$.

3) On en déduit donc que $\dim(F) = 3$.

Exercice B.2 : Déterminer la dimension de : $A = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y'' - 2y' + 5y = 0\}$.

C'est la même chose que dans le cours on a :

$$A = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y'' - 2y' + 5y = 0\}$$

On résout le polynôme caractéristique :

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -16 = (4i)^2$$

On a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i \\ r_2 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \end{cases}$$

On a donc :

$$y \in S \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (A \cos(2x) + B \sin(2x))e^x$$

On en déduit donc que :

$$A = \{y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); y'' - 2y' + 5y = 0\} = \text{vect}(x \mapsto \cos(2x)e^x, x \mapsto \sin(2x)e^x)$$

On en déduit donc que :

$$\dim(A) = 2$$

Remarque : En fait ici on démontre que $\dim(A) \geq 2$ et non $\dim(A) = 2$. On démontrera cela dans le cours sur les applications linéaires.

Exercice B.3 : On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; -2x + y + 2z = 0 \right\}$. Déterminer une base de F , sa dimension et un supplémentaire.

Intuitivement on peut dire que $\dim(F) = 2$. En effet on impose une condition sur le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Donc on a $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3) - 1 = 2$.

Il faut à présent le prouver par le calcul.

1) **$\dim(F) \leq 2$**

En effet on a :

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F \Rightarrow F \neq E \Rightarrow \dim(F) \leq 2$$

2) **$\dim(F) \geq 2$**

Il faut trouver une famille **libre** de F de cardinal 2. On pose :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a alors la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ qui est une famille **libre** (les vecteurs **ne sont pas colinéaires**) de F . On a donc $\dim(F) \geq 2$.

3) On en déduit donc que **$\dim(F) = 2$** .

Il faut chercher à présent un supplémentaire.

On cherche H tel que :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus H$$

On doit avoir :

i) **$F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$**

ii) **$\dim(F) + \dim(H) = 3$**

On pose :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \notin F$$

On pose :

$$h = \text{vect}(u) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

i) On doit démontrer que :

$$F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

Soit **$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap H$** .

On a donc :

$$\begin{cases} e \in F \Rightarrow -2x + y + 2z = 0 \\ e \in H \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -2\lambda + (-2\lambda) + 2(3\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $F \cap H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) On a ensuite deux stratégies :

- On montre que :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \exists (e_1, e_2) \in F \times H, e = e_1 + e_2 \quad 5 \text{ (PENIBLE)}$$

On est obligé de le faire en dimension infinie !

- On montre que :

$$\dim(H) + \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Bien sûr c'est la deuxième méthode que l'on applique (quasiment) à chaque fois en dimension finie !!!

ii) On a :

$$\dim(F) = 2, \dim(H) = \dim(\text{vect}(u)) = 1 \\ \Rightarrow \dim(F) + \dim(H) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Donc on a :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; -2x + y + 2z = 0 \right\} \oplus \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^3$$

Nous allons illustrer le côté **pénible** de la première méthode !!

Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

On veut trouver $e_1 \in F$ et $e_2 \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e_1 + e_2$$

On sait que :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; -2x + y + 2z = 0 \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

On décompose alors le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

On cherche $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = y \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - \frac{3}{2}y - 2z \\ -x + y + z \\ -x + \frac{1}{2}y + z \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \underbrace{\left(3x - \frac{3}{2}y - 2z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in F} + (-x + y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-x + \frac{1}{2}y + z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x - \frac{1}{2}y - z \\ -2x + 2y + 2z \\ 3x - \frac{3}{2}y - 2z \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x + \frac{1}{2}y + z \\ 2x - y - 2z \\ -3x + \frac{3}{2}y + 3z \end{pmatrix}}_{\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)} \\ &= e_1 + e_2 \end{aligned}$$

Exercice B.4 : Même exercice que B.3 avec $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + iy - z = 0 \end{cases} \right\}$

Ici on a 3 degrés de liberté mais deux conditions linéairement indépendantes. On peut donc dire **intuitivement** que **dim(G) = 1**. Nous allons le prouver.

1) Ici on ne peut pas utiliser ce que l'on a fait précédemment car il existe une infinité de sev de $\mathbb{C}^3$ de dimension 2. Donc on ne peut pas en exclure. Nous allons être obligé de montrer que G admet un vecteur $a \in G$ tel que :

$$G = \text{vect}(a)$$

On pose :

$$a = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2i \\ -1 - i \end{pmatrix} \in G$$

De plus on a :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G, \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + iy - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ x + iy = z \end{cases} \Leftrightarrow x = (-1 + i)z; y = (-1 - i)z$$

On a donc :

$$\forall e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G, \begin{cases} x = (-1 + i)z \\ y = (-1 - i)z \end{cases} \Leftrightarrow \forall e \in G, \exists z \in \mathbb{R}, e = \begin{pmatrix} (-1 + i)z \\ (-1 - i)z \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{-1 + i}{2}z\right) \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2i \\ -1 - i \end{pmatrix}$$

Donc $G \subset \text{vect}(a)$

Comme $a = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 2i \\ -1 - i \end{pmatrix} \in G$, **$G = \text{vect}(a)$** .

Exercice B.5 : Soient $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X] \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; A|P\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(a) = 0\}$.

a) Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$ et en donner une base.

c) Déterminer la dimension de F et en donner une base. En déduire une base de G.

a) Cela commence à être un classique !

i) $0_{\mathbb{R}_n[X]} \in F$

ii) $\forall (P_1, P_2) \in F^2, P = P_1 + P_2 \in F$ car $P(1) = P_1(1) + P_2(1) = 0$

iii) $\forall P \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, Q = \lambda P \in F$ car $Q(1) = \lambda P(1) = 0$

Donc F est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Il suffit de trouver un vecteur qui n'appartient pas à F. On pose : $P(X) = X - a + 1$

On pose alors $H = \text{vect}(X - a + 1)$. Montrons que :

$$\mathbb{R}_n[X] = F \oplus H$$

i) $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$

Soit $P \in F \cap H$. On a donc :

$$\begin{cases} P(a) = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, P(X) = \lambda(X - a + 1) \end{cases} \Rightarrow P(a) = \lambda = 0 \Rightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$$

ii) Il faut ensuite montrer que :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(F) + \dim(G)$$

On sait déjà que :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1 \text{ et } \dim(G) = 1$$

Il reste à trouver $\dim(F)$!

- $\dim(F) \leq n$

En effet $F \cap \mathbb{R}_n[X]$ et $F \neq \mathbb{R}_n[X]$ car $P(X) = X - a + 1 \notin F$.

- $\dim(F) \geq n$

En effet la famille $\mathcal{B} = (X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une famille de F libre (car famille de polynômes échelonnées), de cardinal n . Donc $\dim(F) \geq n$.

On en déduit donc que :

$$\dim(F) = n$$

On a donc :

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(F) + \dim(G)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}_n[X] = F \oplus H$$

Donc $H = \text{vect}(X - a + 1)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$. Attention il y en a une infinité !

Exercice B.6 : Déterminer le rang des familles suivantes :

- a) $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (-1, 1, -1)$, $x_3 = (0, 1, 1)$, $x_4 = (1, 0, 2)$;
 b) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, -2, 1, -1)$;
 c) $x_1 = (0, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, -1)$, $x_3 = (1, -1, -1, 1)$, $x_4 = (1, 1, 1, 1)$;
 d) $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$.

a) On cherche :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

On sait que :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \leq 3$$

Car ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$!

On remarque de plus que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

De plus on a :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Enfin les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 2$$

b) On cherche :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

On remarque déjà que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Montrons que cette famille est libre.

On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

On a donc :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 3$$

c) On cherche :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Il reste à montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est **libre**.

On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est **libre**.

On a donc :

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3$$

d) On pose $P_1(X) = X^2 + X - 3$, $P_2(X) = X^2 - X - 3$ et $P_3(X) = 2X^2 - X - 6$

On peut voir que la famille (P_1, P_2) est **libre** car :

$\nexists \lambda \in \mathbb{R}, P_1(X) = \lambda P_2(X)$.

Donc :

$$\text{rg}(X^2 + X - 3, X^2 - X - 3, 2X^2 - X - 6) \geq 2$$

Il reste à voir si $P_3(X) = 2X^2 - X - 6 \in \text{vect}(P_1, P_2)$.

On résout :

$$\begin{aligned} \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 &= 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow \lambda_1 (X^2 + X - 3) + \lambda_2 (X^2 - X - 3) + \lambda_3 (2X^2 - X - 6) &= 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow X^2(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) + X(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) - 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 &= 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On voit ici que l'on a une infinité de solutions (2 équations et 3 inconnues, et le système est compatible car $(0; 0; 0)$ est solution). On a par exemple :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{3}{2}, \lambda_3 = 1$$

On a bien :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X^2 + X - 3) + \frac{3}{2}(X^2 - X - 3) &= 2X^2 - X - 6 \\ \Rightarrow P_3 &\in \text{vect}(P_1, P_2) \\ \Rightarrow \text{rg}(P_1, P_2, P_3) &= \text{rg}(P_1, P_2) = 2 \end{aligned}$$

Exercice B.7 : On pose :

$$u = (1, 2, 1, 0) \text{ et } v = (0, 1, 2, 1)$$

De plus on pose :

$$F = \text{vect}(u, v) \text{ et } G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = t - z \text{ et } x - z + 2t = 0\}$$

Montrer que $F = G$.

C'est une égalité d'ensemble. Il faut donc démontrer une double inclusion.

On peut déjà remarquer (ce n'est pas dur mais un peu pénible...) que G est un sev de $\mathbb{R}^4$.

i) $F \subset G$

On a :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_u - y_u = -1 = t_u - z_u \\ x_u - z_u + 2t_u = 0 \end{cases} \Rightarrow u \in G$$

De même :

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_v - y_v = -1 = t_v - z_v \\ x_v - z_v + 2t_v = 0 \end{cases} \Rightarrow v \in G$$

On a donc :

$$(u, v) \in G^2 \Rightarrow \text{vect}(u, v) \subset G$$

ii) $G \subset F$

Il suffit de montrer que $\dim(G) = 2$. On peut le voir intuitivement, car on a $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$ mais comme on impose deux conditions ($x - y = t - z$ et $x - z + 2t = 0$) indépendantes, on perd deux degrés de liberté. On a donc $\dim(G) = 2$. Mais il faut le prouver !!

Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G$. On a donc :

$$\begin{cases} x - y = t - z \\ x - z + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - 2t \\ y = x - t + z = 2z - 3t \end{cases}$$

On a donc l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} e \in G &\Leftrightarrow \exists (z, t) \in \mathbb{R}^2, e = \begin{pmatrix} z - 2t \\ 2z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists (z, t) \in \mathbb{R}^2, e = (z - 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow e \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On a donc :

$$G = \text{vect}(u, v)$$

Remarque : En fait ici on peut se passer de i) car on a démontré directement une équivalence dans ii). Mais il est souvent plus prudent de faire un sens puis l'autre !

Exercice B.8 : On pose :

$$a = (0, 1, -1, 2), b = (1, 3, 0, 2), c = (2, 1, -3, 4), d = (0, 0, 2, 1), e = (-1, 1, 0, 3)$$

De plus on pose :

$$F = \text{vect}(a, b, c) \text{ et } G = \text{vect}(d, e)$$

Déterminer les dimensions de F , G , $F \cap G$ et $F + G$.

Pour déterminer la dimension de F il faut voir si la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est **libre** !

On résout :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = -3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc $\dim(F) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = 3$

Remarque : On peut même expliciter F !

On a :

$$\begin{aligned} e \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, e = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(F) = 3$. Il faut donc trouver une relation qui lit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$.

On pose :

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 = z \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On doit alors inverser $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Avec différentes méthodes que l'on a vu dans le cours (ici j'ai utilisé Python... je n'ai pas fais les calculs !!) :

$$P \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -9 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = y \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -9 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{5}{8}z \\ \frac{1}{4}(x + y + z) \\ \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 2\left(-\frac{9}{8}x + \frac{3}{8}y - \frac{5}{8}z\right) + 2\left(\frac{1}{4}(x + y + z)\right) + 4\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}z\right) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}z \end{aligned}$$

On a donc :

$$F = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \left\{ e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; x - 3y + 5z + 4t = 0 \right\}$$

Remarque : On vérifiera bien que les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\left\{ e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; x - 3y + 5z + 4t = 0 \right\} !!$

De même on a :

$$G = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \dim(G) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 2$$

Comme les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires on peut en déduire que $\dim(G) = 2$.

Il faut donc trouver deux relations qui lient les coordonnées d'un élément $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de G .

On a :

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 2\lambda_1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$y = -x \text{ et } t = \frac{z}{2} + 3y$$

On a donc :

$$G = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \left\{ e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; \begin{cases} y = -x \\ 6y + z - 2t = 0 \end{cases} \right\}$$

On peut à présent rechercher la dimension de $F \cap G$.

Si $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ alors on aurait $H = F \oplus G$ un sev de $\mathbb{R}^4$ de dimension $\dim(F) + \dim(G) = 5$ ce qui est absurde.

Donc $\dim(F \cap G) \geq 1$

De plus si $\dim(F \cap G) = 2$, comme $F \cap G$ est un sev de G alors $F \cap G = G$. Ainsi on aurait $G \subset F$.

Or cela est impossible car :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in G \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$$

Ainsi on a :

$$\dim(F \cap G) = 1$$

D'après la formule de **Grassman** on en déduit que :

$$\dim(F + G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$$

Ainsi on a :

$$\mathbb{R}^4 = F + G$$

Exercice B.9 : Soit E un ev de dimension finie et F et G deux sev de E de même dimension.

a) Si F et G sont deux sev stricts de E , montrer que $F \cup G \neq E$. En déduire qu'il existe $u \in E \setminus (F \cup G)$.

b) En raisonnant par récurrence sur $k = \dim(E) - \dim(F)$, montrer qu'il existe H sev de E tel que :

$$F \oplus H = G \oplus H = E$$

a) On sait d'après l'exercice A.4 du TD 21.A que $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Donc si $F \cup G = E$ alors $F \cup G = F = E$ ou $F \cup G = G = E$. Cela contredit le fait que F et G sont deux sev stricts de E .

Ainsi $F \cup G \neq E$ donc :

$$\exists u \in E \setminus (F \cup G)$$

b) **Initialisation** : $k = 0 \Rightarrow \dim(E) = \dim(F) \Rightarrow F = E = G$ car G et F ont même dimension.

On a donc :

$$F \oplus \{0_E\} = G \oplus \{0_E\} = E$$

Hérédité : Soit $k \in \llbracket 0, \dim(E) - 1 \rrbracket$ fixé. On suppose vraie qu'il existe H sev de E tel que :

$$F \oplus H = G \oplus H = E$$

On pose :

$$k + 1 = \dim(E) - \dim(F)$$

Donc $\dim(F) \neq \dim(E)$ donc F est un sev strict de E , tout comme G qui a même dimension de F .

Donc d'après le a) on a :

$$\exists u \in E \setminus (F \cup G)$$

Comme $u \neq 0_E$ on a $H_1 = \text{vect}(u)$ qui est de dimension 1.

On a donc :

$$F \oplus \text{vect}(u) \text{ et } G \oplus H_1$$

On a alors :

$$k = \dim(E) - \dim(F \oplus \text{vect}(u)) = \dim(E) - \dim(G \oplus \text{vect}(u))$$

D'après l'hypothèse de récurrence on sait qu'il existe H_2 sev de E tel que :

$$F \oplus \text{vect}(u) \oplus H_2 = G \oplus \text{vect}(u) \oplus H_2 = E$$

On pose alors :

$$H = \text{vect}(u) \oplus H_2$$

On a alors :

$$F \oplus H = G \oplus H = E$$

Donc la propriété est héréditaire.

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence.

Exercice B.10 : On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(0) = P(1)\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

On peut voir que $\dim(F) = 3$. En effet la famille $(1, X(X-1), X^2(X-1))$ est une famille **libre** (car famille de **polynômes échelonnés**) de F . Donc $\dim(F) \geq 3$.

De plus $\dim(F) < 4$ car $F \neq \mathbb{R}_3[X]$ car $P(X) = X \notin F$.

On a donc $\dim(F) = 3$.

Pour déterminer un supplémentaire il suffit de prendre un polynôme non nul de $\mathbb{R}_3[X] \setminus F$. Par exemple :

$$P(X) = X$$

On a alors :

$$F \oplus \text{vect}(X) = \mathbb{R}_3[X]$$

C'est assez facile à démontrer et on l'a déjà fait précédemment :

$$\text{i) } F \cap \text{vect}(X) = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$$

$$\text{ii) } \dim(F) + \dim(\text{vect}(X)) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X]).$$