

Programme de colle n°21
(23 au 27 mars)

Intégration

- Subdivision d'un segment
- Intégration des fonctions en escalier
- Valeur moyenne
- Propriétés de l'intégrale
- Somme de Riemann
- Taylor avec reste intégral

Famille finie de vecteurs

- Famille libre, liée, génératrice
- Base d'un espace vectoriel, bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}_{n,p}(\mathbb{C})$
- Somme directe et base adaptée

Espace vectoriel de dimension finie

- Base et dimension d'un ev de dimension finie
- Théorème de la base extraite, de la base incomplète
- Dimension d'un produit cartésien
- Sous-espace vectoriel de dimension finie (Hyperplan, plan vectoriel...), formule de Grassman

Démo de cours

Propriété I.b.4 (Théorème de la base incomplète) : Soit E un ev de dimension finie. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E , espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{F}$ peut être complété en une base de E :
 $\exists (e_{p+1}, \dots, e_n) \in E^{n-p}, (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E .

Propriété III.b.4 (Formule de Grassman) : Pour tout sev F et G de E ev quelconque. On a :
 $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Propriété I.a.2 (Méthode des rectangles à gauche) : Si f est continue sur $[a; b]$ alors :

$$\lim_n \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$$

(Démonstration dans le cas où f est lipschitzienne.)

Propriété (Taylor avec reste intégrale) : Soient n un entier naturel $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Propriété I.d.1 : Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ continue sur $[a; b]$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $\theta: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telle que :
 $\forall x \in [a; b], |f(x) - \theta(x)| \leq \epsilon$

Propriété III.a.1 : Soit $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $a \in I$. pose :

$$F : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

On a alors : $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Exercices du type

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Exercices types : Déterminer des bases et les dimensions de $S_n(\mathbb{R})$, de $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}, x + 2y + z = 0 \right\}$,
 $\{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$, $\{M \in M_n(\mathbb{R}), \text{tr}(M) = 0\}$.

Exercice E.1 : Sans calculer les intégrales correspondantes, déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)^2} dt$$

Exercice D.2 : Calculer la limite de:

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n}}; \quad u_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$