

DM n°6 bis

Problème 2 : Les séries de Fourier

Le but de ce problème est de démontrer la décomposition d'une fonction périodique grâce aux séries de Fourier, dans un cadre un peu restreint, celui des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui est tout de même excellent. Dans toute la suite de ce problème, on pose $\mathcal{T}_{2\pi}^1$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$. Dans tout ce problème n et m désignent des entiers naturels, $m \neq 0$.

Partie A : Une famille libre de $\mathcal{T}_{2\pi}^1$ et les coefficients de Fourier

1) Montrer que $\mathcal{T}_{2\pi}^1$ est un espace vectoriel.

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(nx) \end{cases} \text{ et } s_n: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(nx) \end{cases}$$

a) Calculer :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{N}^2, C_{k,k'} = \int_0^{2\pi} c_k(x) c_{k'}(x) dx$$

b) De même calculer :

$$\forall (k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2, S_{k,k'} = \int_0^{2\pi} s_k(x) s_{k'}(x) dx$$

c) Enfin calculer :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, D_{k,k'} = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_{k'}(x) dx$$

d) On définit :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \mathcal{F}_{n,m} = (c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_m)$$

Montrer que la famille $\mathcal{F}_{n,m}$ est libre dans $\mathcal{T}_{2\pi}^1$.

2) Soit n et m deux entiers naturels, $m \neq 0$. Dans cette question on pose :

$$f \in \text{vect}(\mathcal{F}_{n,m})$$

On a ainsi :

$$\exists (a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+1+m} \text{ tel que } f = \sum_{k=0}^n a_k c_k + \sum_{k=1}^m b_k s_k$$

a) Démontrer que :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

b) Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

c) De même démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

On doit montrer à présent que :

$$\forall f \in \mathcal{T}_{2\pi}^1, \exists (a_n(f), b_n(f)) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*} \text{ tel que : } f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f) c_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f) s_k = a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) c_k + b_k(f) s_k)$$

Partie B : la décomposition en série de Fourier : Le noyau de Dirichlet

Soit $f \in \mathcal{T}_{2\pi}^1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit dans cette partie la fonction $S_n(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Avec :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \text{ et } b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

On veut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(f)(x) - f(x)| = 0$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

Avec

$$D_n: x \mapsto \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx) \right)$$

2) a) Montrer que :

$$\forall g \in \mathcal{T}_{2\pi}^1, \forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

3) a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \notin 0[2\pi], D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

b) Montrer que D_n est paire, 2π -périodique et :

$$\int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 1$$

c) Démontrer que l'application :

$$g: \begin{cases}]0; 2\pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{cases}$$

Peut-être prolongée par continuité en 0 et 2π , on notera ce prolongement g pour la suite.

4) a) Démontrer que :

$$\forall h \in \mathcal{C}^1([a, b]), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(nt) dt = 0$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(f)(x) - f(x)| = 0$$

On a ainsi démontré que :

$$\forall f \in \mathcal{T}_{2\pi}^1, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \right) \cos(kx) + \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \right) \sin(kx) \right)$$