

DM n°6

Problème 1: Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pour cela nous allons le faire en deux temps. Dans un premier temps nous allons montrer que :

$$\frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \rightarrow k, \text{ avec } k \in \mathbb{R}^*$$

Puis nous irons chercher la valeur de k .

Partie A : Convergence de deux suites

On considère les deux suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \ln(u_n)$$

1) Démontrer que :

$$v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{12} \times \frac{1}{n^2}$$

2) En déduire que (v_n) converge (On pourra montrer que la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge).

3) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie B : Calcul de la constante k

Dans cette partie on souhaite prouver que $k = \sqrt{2\pi}$.

On pose la suite (W_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

2) Démontrer que la suite $nW_n W_{n+1}$ est constante.

3) En déduire que :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \sim \pi$$

4) Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.