

Activité 23.A.1 : Applications linéaires

Définition : Soit E et F deux espaces vectoriels et $f: E \rightarrow F$. On dit que f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Exemple 1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z; 2x - 3y + 2z) \end{cases}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exemple 2: On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y - z \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas une application linéaire.

Exemple 3 : Démontrer que l'application suivante est linéaire :

$$\phi: \begin{cases} \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \\ g \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x g(t) dt \right) \end{cases}$$

Activité 23.A.1 : Applications linéaires

Définition : Soit E et F deux espaces vectoriels et $f: E \rightarrow F$. On dit que f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Exemple 1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z; 2x - 3y + 2z) \end{cases}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exemple 2: On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y - z \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas une application linéaire.

Exemple 3 : Démontrer que l'application suivante est linéaire :

$$\phi: \begin{cases} \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \\ g \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x g(t) dt \right) \end{cases}$$