

Chapitre 23 : Applications linéaires

Partie A : Généralité

Dans tout ce chapitre (comme d'hab en fait!), $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriels.

I) Les applications linéaires

a) Du déjà vu en troisième

Définition : Soit E et F deux espaces vectoriels et $f: E \rightarrow F$. On dit que f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Exemple I.a.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z, 2x + 7y - 2z) \end{cases}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Exemple I.a.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto x \times z + y - z \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas une application linéaire.

Exemple I.a.3 : Déterminer une application linéaire de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$

Propriété I.a.4 : Soit $f: E \rightarrow F$. Alors f est une application linéaire si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Application I.a.5 : Démontrer que l'application suivante est linéaire :

$$f: \begin{cases} \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \\ g \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x g(t) dt \right) \end{cases}$$

b) Vocabulaire

Définition : Soit $f: E \rightarrow F$ linéaire. On dit que f est :

- un endomorphisme si $E=F$
- Un isomorphisme si f est bijective.
- Un automorphisme si $E=F$ et f bijective.
- Une forme linéaire si $F = \mathbb{K}$

Notation :

- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F .
- On notera $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- On notera $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires de E , aussi appelé dual de E .

Exemple I.b.1 : Déterminer un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple I.b.2 : Démontrer que l'application suivante est bijective et déterminer f^{-1} :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (x, y, z) \mapsto x + y(X - 1) + z(X^2 - 1) \end{cases}$$

Exemple I.b.3 : Démontrer que l'application suivante est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et déterminer f^{-1} :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$$

Exemple I.b.4 : Déterminer une forme linéaire de $M_n(\mathbb{R})$.

II) Opérations sur les applications linéaires

a) Sous espace vectoriel

Propriété II.a.1 : $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^E = \mathcal{F}(E, F)$.

Application II.a.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z; 2x - 3y + 2z) \end{cases} \text{ et } g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x - z; y + 2z) \end{cases}$$

Déterminer l'application linéaire $2f+3g$.

b) Composée

Propriété II.b.1 (Composée) : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ où G est un ev. Alors :
 $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$

Application II.b.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(0); P(1); P(2)) \end{cases} \text{ et } g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y - z; 2x - 3y + 2z) \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f(X^2 + 3X + 1)$

Application II.b.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (0; x) \end{cases} \text{ et } g: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y; 0) \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Définition : Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et n entier naturel. On pose alors $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

Par convention on pose :

$$f^0 = Id_{\mathcal{L}(E)}$$

Exemple II.b.4 : On pose

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) \mapsto XP'(X) \end{cases}$$

Déterminer $f^3(X^5 + 3X^4 + 7)$

Définition (Polynômes d'endomorphismes) : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit alors l'endomorphisme :

$$P(f) = \sum_{k=0}^n p_k f^k$$

Exemple II.b.5 : On pose :

$$P(X) = X^2 + 3X + 7 \text{ et } f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y; x - y) \end{cases}$$

Déterminer $P(f)$

Propriété II.b.6 (Identités remarquables) : Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ qui commutent ($f \circ g = g \circ f$). On a alors :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = (f + g)^n \text{ et } f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}$$

Application II.b.7 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x + y; 3y) \end{cases}$$

Déterminer f^n pour tout entier naturel n .

III) Image et noyau

a) Image d'une application linéaire

Propriété III.a.1 (Image de 0_E) : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$f(0_E) = 0_F$$

Propriété III.a.2 (image directe) : Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et E' un sev de E . On pose :

$$f(E') = \{y = f(x); x \in E'\}$$

Alors $f(E')$, appelé l'image directe de E' , est un sous-espace vectoriel de F .

Exemple III.a.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P - XP' \end{cases}$$

Déterminer $f(\mathbb{R}_1[X])$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f(E)$ est un sev de F , appelé l'image de f , noté $\text{Im}(f)$:

$$\text{Im}(f) = \{y = f(x); x \in E\}$$

Exemple III.a.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y; x - z) \end{cases}$$

Déterminer $\text{Im}(f)$.

Exemple III.a.4 :

On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y; 2x + 2y) \end{cases}$$

Déterminer $\text{Im}(f)$.

b) Noyau d'une application linéaire

Propriété III.b.1 (Image réciproque) : Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et F' un sev de F . On pose :

$$f^{-1}(F') = \{x \in E; f(x) \in F'\}$$

Alors $f^{-1}(F')$, appelé l'image réciproque de F' , est un sous-espace vectoriel de E .

Exemple III.b.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P - XP' \end{cases}$$

Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R}_1[X])$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sev de E , appelé le noyau de f , noté $\text{Ker}(f)$:

$$\text{ker}(f) = \{x \in E; f(x) = 0_F\}$$

Exemple III.b.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y; x - z) \end{cases}$$

Déterminer le noyau de f .

Exemple III.b.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y; 2x + 2y) \end{cases}$$

Déterminer le noyau de f .

c) Conséquence

Propriété III.c.1 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

- f est surjective $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$
- f est injective $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{O_E\}$

Application III.c.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y; x + z; y + z) \end{cases}$$

Démontrer que f est injective.

Application III.c.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \\ g \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x g(t) dt \right) \end{cases}$$

Déterminer le noyau et l'image de f . Que peut-on en déduire qu'en a l'injectivité et la surjection de f ?