

Chapitre 23: Applications linéaires
Partie C : Endomorphismes remarquables
I) Modes de définition d'une application linéaire
a) Avec une base

Propriété I.a.1 : On considère deux $\mathbb{K}$ -ev E et F avec $\dim(E) = n$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application linéaire $f: E \rightarrow F$ telle que :

$$\forall i \in \{1; \dots; n\}, f(e_i) = v_i$$

Remarque : Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Application I.a.2 : On pose $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire telle que :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'image de n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ par f .

Exemple I.a.3 : On pose $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'image de n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ par f .

Application I.a.4 : Démontrer que f est un isomorphisme et déterminer f^{-1} avec $f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(0), P(1), P(-1)) \end{cases}$

b) $\dim(\mathcal{L}(E, F))$ et base duale

Propriété I.b.1 : On considère deux $\mathbb{K}$ -ev E et F de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Application I.b.2 : Si $\dim(E) = n$ alors $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = n$.

II) Homothéties
a) L'application identité

Définition : L'application identité d'un E ev, notée Id_E , est l'endomorphisme :

$$\text{Id}_E: \begin{cases} E \rightarrow E \\ e \mapsto e \end{cases}$$

Remarque : L'identité est souvent utilisée pour démontrer la bijection d'une application linéaire, et aussi pour l'utiliser dans le binôme de Newton.

Application II.a.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, y + z, x + z) \end{cases}$$

Démontrer que f est bijective et calculer f^{-1} .

Application II.a.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x + y; 3y) \end{cases}$$

Déterminer f^n pour tout entier naturel n .

b) Homothéties

Définition : Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On définit l'homothétie vectorielle de rapport α l'endomorphisme :

$$h_\alpha: \begin{cases} E \rightarrow E \\ e \mapsto \alpha \cdot e \end{cases}$$

On a $h_\alpha = \alpha \cdot \text{Id}_E$

Remarque : Les homothéties commutent avec tous les endomorphismes, ce qui nous permet par exemple d'utiliser le binôme de Newton.

Application II.b.1 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ aX^2 + bX + c \mapsto 2aX^2 + (a + 2b)X + a + b + 2c \end{cases}$$

Calculer f^n pour tout entier naturel n .

III) Projecteurs

a) Une application linéaire sur une somme directe

Propriété III.a.1 : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et F deux espaces vectoriels. Pour tout couple d'applications linéaires $f_1: E_1 \rightarrow F$ et $f_2: E_2 \rightarrow F$ alors il existe une et une seule application linéaire $f: E \rightarrow F$ définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, f(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

Remarque : Cela signifie qu'une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions sur E_1 et E_2 .

b) Projecteurs

Définition (Projection) : Soient E un espace vectoriel tel que $E = E_1 \oplus E_2$. On appelle projection sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique application linéaire $p: E \rightarrow E_1$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, p(x_1) = x_1 \text{ et } p(x_2) = 0_E$$

Ainsi pour tout $x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, p(x) = p(x_1 + x_2) = x_1$

Exemple III.b.1 : Soit $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses parallèlement à la droite d'équation $(\Delta): y = x$. Déterminer l'expression de f .

Exemple III.b.2 : Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0 \right\}$ et $G = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer $p_F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le projecteur

sur F parallèlement à G , puis $p_G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le projecteur sur G parallèlement à F .

Application III.b.3 : On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; P \text{ est pair}\}, G = \{P \in \mathbb{R}[X]; P \text{ est impair}\}$.

a) Montrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus G$.

b) Déterminer $p_F(1 + X + 3X^2 + 2X^3 - 2X^4 + X^5)$ le projecteur sur F parallèlement à G .

Propriété III.b.3 : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 . On a alors :

(1) $\text{pop} = p$

(2) $\ker(p) = E_2$ et $\text{Im}(p) = E_1 = \ker(p - \text{Id}_E)$

c) Caractérisation des projecteurs

Propriété III.c.1 : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$p \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ p = p$$

On a plus précisément $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ et p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Application III.c.2 : Expliciter l'endomorphisme : $f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -9x + 6y \\ -15x + 10y \\ -5x + 3y + z \end{pmatrix}$

d) Projecteurs associés

Définition : Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 , p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 . On dit alors que les deux projecteurs p_1 et p_2 sont associés.

Exemple III.d.1 : Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer $p_F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le projecteur sur F parallèlement à G , puis $p_G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ le projecteur sur G parallèlement à F .

Propriété III.d.2 : Soient p_1 et p_2 deux projecteurs associés. On a alors :

- $p_1 + p_2 = \text{Id}_E$
- $p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

IV) Symétrie

a) Définition

Définition : Soient E un espace vectoriel tel que $E = E_1 \oplus E_2$. On appelle symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2 l'unique application linéaire $s: E \rightarrow E$ tel que :

$$\forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, s(x_1) = x_1 \text{ et } s(x_2) = -x_2$$

Ainsi pour tout $x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, s(x) = s(x_1 + x_2) = x_1 - x_2$

Exemple IV.a.1 : Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer $s_F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la symétrie par rapport à F dans la direction de G .

Exemple IV.a.2 : On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \text{ est pair}\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}[X]; \deg(P) \text{ est impair}\}$. Déterminer $s_G(1 + X + 3X^2 + 2X^3 - 2X^4 + X^5)$ la symétrie par rapport à G dans la direction de F .

b) Propriétés

Propriété IV.b.1 : Soient $E = E_1 \oplus E_2, s_{E_1}: E \rightarrow E$ la symétrie par rapport à E_1 dans la direction de E_2 . On a alors :

- $s \circ s = \text{Id}_E$.
- $E_1 = \text{Inv}(s) = \ker(s - \text{Id}_E)$
- $E_2 = \ker(s + \text{Id}_E)$

Propriété IV.b.2 : Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$s \text{ est une symétrie} \Leftrightarrow s \circ s = \text{Id}_E$$

On a plus précisément $E = \ker(s - \text{Id}_E) \oplus \ker(s + \text{Id}_E)$ et p est la symétrie par rapport à $\ker(s - \text{Id}_E)$ dans la direction de $\ker(s + \text{Id}_E)$.

Application IV.b.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x - 2y + 2z \\ -2x - y + 2z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Expliciter cet endomorphisme.

Application IV.b.4 : On pose :

$$T: \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f \mapsto (x \mapsto f(-x)) \end{cases}$$

Montrer que T est une symétrie et expliciter ses éléments caractéristiques.