

TD 23 : Applications linéaires

Partie A : Généralité

Exercice A.1 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y; x - y) \end{cases}$$

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto (y, 0, x - y, 2) \end{cases}$$

Exercice A.2 : Démontrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(0); P(2)) \end{cases}$$

$$A \in M_n(\mathbb{R}); g_A: \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$$

Exercice A.3 (Endomorphismes nilpotents) : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

- Montrer qu'il existe x dans E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
- Montrer que la famille $(x, f(x); \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
- Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie cette propriété $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

Exercice A.4 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - 4y; 2y) \end{cases}$$

Déterminer : $f^{20}((2, -3))$.

Partie B : Image et noyau

Exercice B.1 : Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, 2x + 2z) \end{cases}$$

Exercice B.2 : Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P - XP' \end{cases}$$

Exercice B.3 : Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

$$a) f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad b) f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix} \end{cases} \quad c) f: \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z + i\bar{z} \end{cases} \quad d) f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P - (X + 1)P' \end{cases}$$

Exercice B.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

Exercice B.5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$$

Exercice B.6 : On pose :

$$\Delta: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X + 1) - P(X) \end{cases}$$

- Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P .
- Démontrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.
- Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_n[X], P(X + 1) - P(X) = Q(X)$$

Exercice B.7 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z) \end{cases}$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice B.8 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P'' \end{cases}$$

Déterminer l'image et le noyau de f .

Exercice B.9 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X) - XP'(0) - X^2P''(0) \end{cases}$$

Déterminer l'image et le noyau de f .

Exercice B.10 : Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

- $\ker(\text{gof}) = f^{-1}(\ker(g) \cap \text{Im}(f))$
- $f^{-1}(\ker(g)) = f^{-1}(\ker(g) \cap \text{Im}(f))$

Exercice B.11 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ une application linéaire définie par :

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3, u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3, u(e_3) = 3f_1 - f_3, u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

- Déterminer l'image du vecteur $x = (2, 6, 5, -1)$ par u .
- D'une façon générale déterminer l'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
- Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
- Déterminer une base de $\text{Im}(u)$ et sa dimension.

Partie C : Isomorphismes

Exercice C.1 : Pour les applications suivantes, déterminer $\text{Ker}(f_i)$ et $\text{Im}(f_i)$ et en déduire si ce sont des isomorphismes :

- $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x - y) \end{cases}$
- $f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \end{cases}$
- $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto (y, 0, x - 7y, x + y) \end{cases}$
- $f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$

Exercice C.2 : Déterminer la dimension de :

$$U = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n\}$$

Exercice C.3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E . Montrer que G et $\text{Im}(f)$ sont isomorphes.

Partie D : Endomorphismes définie sur une base, sur des sous-espaces supplémentaires

Exercice D.1 : On pose $F = \text{vect}((1, 0, 0)), G = \text{vect}((1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

- Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :
 $\forall u \in F, f(u) = 2u, \forall v \in G, f(v) = -v$
- Expliciter cet endomorphisme.

Exercice D.2 : On pose $F = \text{vect}((1, 0, 0)), G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$.

- Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :
 $\forall u \in F, f(u) = -2u, \forall v \in G, f(v) = v$
- Expliciter cet endomorphisme.

Exercice D.3 : On pose $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'image de f , $\text{Im}(f)$.

Partie E: Endomorphismes remarquables

Exercice E.1 : On pose :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, F = \text{vect}(e_1, e_2) \text{ et } G = \text{vect}(e_3)$$

- Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G .
- Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

Exercice E.2 : On pose $F = \text{vect}((1,0,0))$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-z=0\}$.

- Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G .
- Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

Exercice E.3 : Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On pose $f_A: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme R , reste de la division euclidienne de P par A .

Montrer que P est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

Exercice E.4 : Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E .

- Montrer que $\text{Id}_E - p$ est un projecteur.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0; 1\}$, $p - \lambda \text{Id}_E \in \text{GL}(E)$

Exercice E.5 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4x - y - 2z \\ -2x + 3y - 4z \\ -x - y + 3z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur et en déduire ces éléments caractéristiques.

Exercice E.6 : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, soient p et q des projecteurs de E .

- Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $poq = qop = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- Montrer qu'alors :

$$\begin{aligned} \text{Im}(p+q) &= \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q) \\ \ker(p+q) &= \ker(p) \cap \ker(q) \end{aligned}$$

Exercice E.7 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9} \begin{pmatrix} x + 8y - 4z \\ 8x + y + 4z \\ -4x + 4y + 7z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Montrer que f est une symétrie et en déduire ces éléments caractéristiques.

Partie F : Rang d'une application linéaire

Exercice F.1 : Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

$$a) f: \begin{cases} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + z + t \\ x + 2z - t \\ x + y + 3z - t \end{pmatrix} \end{cases} \quad b) g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 2y - 2z \\ x - 3y + 11z \\ -3x + 4y - 18z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice F.2 : Soit u un endomorphisme de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda \cdot u$.

Exercice F.3 : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f + g = \text{Id}_E$ et $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$ où $n = \dim(E)$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice F.4 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

a) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im}(u) = \text{ker}(u)$ si et seulement si n est pair.

b) Montrer qu'alors pour un tel u , il existe une base de E de la forme :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), \dots, u(e_p))$$