

Programme de colle n°22 (30 mars au 2 avril)

Espace vectoriel de dimension finie

- Base et dimension d'un ev de dimension finie
- Théorème de la base extraite, de la base incomplète
- Dimension d'un produit cartésien

Séries numériques

- Définition de $\sum u_n$ converge avec la convergence de la suite des sommes partielles
- Somme géométrique.
- Somme télescopiques

Séries numériques à termes positifs

- Convergence avec majoration des sommes partielles.
- Convergence ou divergence par comparaison (relation d'ordre, notation de Landau, équivalent)
- Comparaison série-intégrale

Séries à termes non constants et complexes

- Absolument convergence implique la convergence
- La réciproque est fausse (contre-exemple !)

Démo de cours

Propriété I.b.4 (Théorème de la base incomplète) : Soit E un ev de dimension finie. Soit $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E , espace vectoriel de dimension finie. Alors $\mathcal{F}$ peut être complété en une base de E :
 $\exists (e_{p+1}, \dots, e_n) \in E^{n-p}, (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E .

Propriété III.b.4 (Formule de Grassman) : Pour tout sev F et G de E ev quelconque. On a :
 $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Propriété :

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge et } \sum \frac{1}{n} \sim \ln(n)$$

Propriété III.a.1 : Soit $(\sum u_n)$ une série à **termes positifs**. On suppose que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \geq 0$$

On a alors :

$$(1) \ell < 1 \Rightarrow \left(\sum u_n \right) \text{ converge}$$

$$(2) \ell > 1 \Rightarrow \left(\sum u_n \right) \text{ diverge}$$

$$(3) \ell = 1 \Rightarrow \text{On ne peut rien conclure.}$$

Critère de Riemann : On a :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Exemple I.b.3 : Montrer que la série est convergente mais pas absolument convergente.

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

Exercices du type

Application III.b.5 : On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \right\}$$

Montrer que E est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

Exercice B.10 : On pose : $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(0) = P(1)\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice A.2 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)$$

Exercice A.4 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2}$$

Exercice A.6 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)}{\cos \left(\frac{1}{n} \right) \cos \left(\frac{1}{n+1} \right)}$$

Exercice B.8 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}, u_n = \frac{1}{n \ln^3(n)}, u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$$