Fiche exercices 22 : Séries numériques

Partie A : Généralités

Exercice A.1 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2-1}$$

On sait que :

$$\forall n \geq 2, \frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{n-1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}$$
$$\Longrightarrow S_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$$
$$= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\Longrightarrow \lim_{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$$

Exercice A.2 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+\frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) = \ln((n+1)^2) - \ln\big(n(n+2)\big)$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\Big(\ln((k+1)^2) - \ln\big(k(k+2)\big)\Big)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n}\ln\big(k(k+2)\big)$$

$$= 2\sum_{k=2}^{n+1}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \sum_{k=3}^{n+2}\ln(k)$$
$$= \ln(2) + \ln(n+1) - \ln(n+2)$$
$$\Longrightarrow \lim_{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) = \ln(2)$$
$$\Longrightarrow \boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right) = \ln(2)}$$

Exercice A.3 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

On décompose en **éléments simples** :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n^2(a+b+c) + n(3a+2b+c) + 2a}{n(n+1)(n+2)}$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a donc :

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{n+2}$$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \boldsymbol{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}}$$

Exercice A.4 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$$

On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=4\times\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}=4\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}=\boldsymbol{\frac{16}{3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}}$$

Exercice A.5 : Déterminer la nature de :

$$\sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{sh}(n)}{\mathrm{ch}(n)}$$

On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\frac{\mathrm{sh}(n)}{\mathrm{ch}(n)}=\frac{e^{n}-e^{-n}}{e^{n}+e^{-n}}=\frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}}\to 1$$

On en déduit que :

$$\boldsymbol{\lim_{n}\frac{\mathrm{sh}(n)}{\mathrm{ch}(n)}\neq 0}$$

Donc la série **diverge grossièrement** !

Exercice A.6 : Déterminer la convergence et la valeur de :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sin\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}=\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall k\in[\![1;n]\!],\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\tan\left(\frac{1}{k}\right)-\tan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)=\tan(1)-\tan\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Or on sait que :

$$\lim_{n}\tan\left(\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{x\to 0}\tan(x)=0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}=\tan(1)$$

On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)} = \tan(1)$$

Partie B : Séries à termes positifs

Exercice B.1 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A)} \sum_{n\geq 2} \frac{n}{n^2+1} \text{ ; B)} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 - \ln(n)} \text{ ; C)} \sum_{n\geq 2} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

A) On pose :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1}$$

On a :

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$$

Or on sait que :

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right) \text{ diverge}$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1}\right) \textbf{ diverge}$$

B) On pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2 - \ln(n)}$$

On a :

$$u_n = \frac{1}{n^2 - \ln(n)} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n^2}}$$

On en déduit que :

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{n^2}} \to 1$$

On en déduit que :

$$u_n = \frac{1}{n^2 - \ln(n)} \sim \frac{1}{n^2}$$

Or on sait que :

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right) \textbf{ converge} \Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - \ln(n)}\right) \text{ converge}$$

c) On pose :

$$u_n = n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On sait que :

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x$$

On en déduit donc que :

$$u_n = n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim n \times \frac{1}{n^2}$$

$$\Longrightarrow u_n \sim \frac{1}{n}$$

Or on sait que :

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\right) \text{ diverge}$$
$$\Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 1} n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \textbf{ diverge}$$

Exercice B.2 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A) } \sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)} \text{ ; B) } \sum_{n\geq 1}\frac{n^2\ln(n)}{e^n} \text{ ; C) } \sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln(n))^{1000}$$

A) On pose :

$$\mathbf{u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}}$$

On a :

$$u_n = \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)} = \frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}} = \frac{1+e^{-2n}}{e^n(1+e^{-4n})}$$

On en déduit que :

$$u_n \times e^n = \frac{1+e^{-2n}}{1+e^{-4n}} \to 1$$

On a donc :

$$u_n \sim e^{-n}$$
$$\Longrightarrow \mathbf{u_n \sim \left(\frac{1}{e}\right)^n}$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{e} \in]-1;1[$$

On en déduit donc que :

$$\left(\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{e}\right)^n\right) \text{converge} \Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}\right) \text{ converge}$$

B) On pose :

$$\mathbf{u_n = \frac{n^2\ln(n)}{e^n}}$$

On a :

$$u_n e^{\frac{n}{2}} = \frac{n^2\ln(n)}{e^{\frac{n}{2}}} = \frac{n^2}{e^{\frac{n}{4}}} \times \frac{\ln(n)}{e^{\frac{n}{4}}} \to 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{u_n = o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n\right)}$$

Or on sait que :

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \in]-1;1[$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \text{ converge}$$
$$\Longrightarrow \sum_{n\geq 0}\frac{n^2\ln(n)}{e^n} \text{ converge}$$

C) On pose :

$$\mathbf{u_n = \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln^{1000}(n)}$$

On a :

$$\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+o\left(\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\right)$$

On en déduit donc que :

$$\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\ln^{1000}(n)\sim\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2\ln^{1000}(n)$$

On a donc :

$$u_n\times n^{1,5}\sim\frac{1}{2}\frac{\pi^2\ln^{1000}(n)}{\sqrt{n}}\to 0\text{ (croissance comparée)}$$

On a donc :

$$\mathbf{u_n=o\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right)}$$

Or on sait d'après le critère de **Riemann** que :

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1,5}}\right)\text{ converge car }\mathbf{1,5>1}$$

$$\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)(\ln(n))^{1000}\ \ \textbf{converge}$$

Exercice B.3 : Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\text{A) }\sum_{n\geq 2}\frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\,n^2}\ ;\ \text{B) }\sum_{n\geq 1}\frac{\arctan(n)}{n^2}\ ;\ \text{C) }\sum_{n\geq 1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-e\right)$$

A) On pose :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*n\geq 2,\mathbf{u_n}=\mathbf{\frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\,n^2}}$$

On a alors :

$$u_n\times n^{1,5}=\frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\,n^2}\times n^{1,5}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\ln^3(n)}\to 0$$

$$\Rightarrow\mathbf{u_n=o\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right)}$$

Or on sait d'après le critère de Riemann que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{1,5}}\text{ converge}$$

$$\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\,n^2}\ \textbf{converge}$$

B) On pose :

$$\mathbf{u_n=\frac{\arctan(n)}{n^2}}$$

On sait que :

$$\lim_n\arctan(n)=\frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$\mathbf{\frac{\arctan(n)}{n^2}}=\mathbf{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Or on sait d'après le critère de Riemann que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\text{ converge}$$

$$\Rightarrow\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)\,n^2}\ \textbf{converge}$$

C) On pose :

$$\mathbf{u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e}$$

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} - e$$

ATTENTION : On sait que les équivalents ne passent pas à l'exponentielle :

$$n^2 + n \sim n^2 \text{ et :}$$

$$e^{n^2+n} \nsim e^{n^2}$$

Il faut donc faire un développement limité en $\frac{1}{n}$ et non un équivalent !!!

Or on sait que :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc :

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a donc :

$$e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e \times e^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)\right) - e$$

$$= \frac{1}{2ne} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{u_n = O\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Or on sait que :

$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right) \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - e\right) \textbf{ diverge}$$

Exercice B.4 : a) Démontrer la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

b) Montrer que :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+, \arctan(u) - \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u - v}{1 + uv}\right)$$

c) En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

a) On a :

$$\mathbf{u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)}$$

On sait que :

$$\mathbf{u_n \sim \frac{1}{n^2 + n + 1} \sim \frac{1}{n^2}}$$

Or on sait que :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \text{ converge car } 2>1 \text{ (critère de Riemann)}$$

Donc :

$$\sum_{n\geq 0}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \textbf{ converge}$$

b) On sait que pour toutes valeurs de a et b réels où l'égalité est définie on a :

$$\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

On en déduit donc que :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^+, \tan(\arctan(u)-\arctan(v))=\frac{\tan(\arctan(u))-\tan(\arctan(v))}{1+\tan(\arctan(u))\tan(\arctan(v))}$$

Or on sait que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \tan(\arctan(x))=x$$

On a donc :

$$\tan(\arctan(u)-\arctan(v))=\frac{u-v}{1+uv}$$

On a donc :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^+, \arctan(\tan(\arctan(u)-\arctan(v)))=\arctan\left(\frac{u-v}{1+uv}\right)$$

Or on sait que :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^+, \arctan(u)-\arctan(v)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \arctan(\tan(\arctan(u)-\arctan(v)))=\arctan(u)-\arctan(v)$$

On en déduit donc que :

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^+, \arctan(u)-\arctan(v)=\arctan\left(\frac{u-v}{1+uv}\right)$$

c) On a :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}, \forall k\in[\![0;n]\!], \sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)&=\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+1)-\arctan(k))\\&=\arctan(n+1)\end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \arctan(n+1)=\frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Exercice B.5 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n=\frac{\ln(n)}{n!}$$

On pose :

$$u_n=\frac{\ln(n)}{n!}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* n \geq 3, u_n \times n^2 = \frac{\ln(n)}{n-2} \times \prod_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k} \times \frac{n}{n+1} \leq \frac{\ln(n)}{n-2} \to 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Donc la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n!} \ \textbf{converge}$$

Ici il aurait été plus judicieux d'utiliser le critère de d'Alembert car :

$$\frac{\mathbf{u_{n+1}}}{\mathbf{u_n}} = \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{\ln(n)}{n!}} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \times \frac{1}{n+1} \to \mathbf{0} < 1$$

Donc la série converge d'après le critère de d'**Alembert** !

Exercice B.6 : Soit $\alpha > 1$. Démontrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{\alpha - 1}$$

On sait que :

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=n}^{n+p+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} \frac{1}{k^\alpha}$$

De plus on sait que :

$$\sum_{k=n}^{n+p+1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \int_n^{n+p+2} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+p+2)^{\alpha-1}}\right)$$

En faisant tendre $p \to +\infty$ on obtient :

$$R_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}} \leq R_{n-1}$$

On a donc :

$$\frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{\alpha - 1}}$$

D'après le théorème des gendarmes.

Exercice B.7 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

On pose :

$$\mathbf{u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

On sait que :

$$\forall x \in [-1; 1], \arccos(x) \geq 0$$

Donc la série est à **termes positifs**.

De plus on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \cos(u_n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

De plus on a :

$$\lim_n u_n = \lim_n \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$$

On peut donc effectuer un développement limité de $\cos(u_n)$ à l'ordre 2 :

$$\cos(u_n) = 1 - \frac{(u_n)^2}{2} + o((u_n)^2)$$

On a odnc :

$$1 - \frac{(u_n)^2}{2} + o((u_n)^2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On en déduit donc que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{(u_n)^2}{2} + o((u_n)^2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{1}{4}}}}$$

Or on sait que la série $\left(\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\right)$ diverge car $\frac{1}{4} < 1$.

Ainsi la série de terme général $u_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **diverge**.

Exercice B.8 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{n!}{n^n}$$

On pose :

$$\mathbf{u_n = \frac{n!}{n^n}}$$

On remarque que u_n est à **terme positif**.

On peut essayer d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$= e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$$

On sait que :

$$\frac{1}{n+1} \to 0$$

On sait aussi le développement limité de $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 1 :

$$\ln(1-x) = -x + o(x)$$

On a donc :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{-1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right) \to 1 + o(1)$$

On a donc :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + o\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-\frac{n}{n+1} + o(1)} \to e^{-1}$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$$

On a donc :

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, u_n \geq 0 \\ \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1 \end{cases}$$

D'après le **critère de d'Alembert**, la série **converge**.

Exercice B.9 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

On pose :

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

On remarque que u_n est à **terme positif**.
On peut essayer d'utiliser le critère de d'Alembert :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \to 4$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 > 1$$

On a donc :

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, u_n \geq 0 \\ \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 > 1 \end{cases}$$

D'après le **critère de d'Alembert**, la série **diverge**.

Exercice B.10 : Déterminer la nature de la série suivante de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n\ln^3(n)}$$

On veut montrer que :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\ln^3(n)} = \frac{1}{2\ln^3(2)} + \frac{1}{3\ln^3(3)} + \frac{1}{4\ln^3(4)} + \cdots + \frac{1}{n\ln^3(n)} + .. = \ell \in \mathbb{R}^+$$

On pose :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x\ln^3(x)} \text{ pour } x \geq 2$$

On va faire une comparaison **série-intégrale** !!

i) On démontre que f est décroissante et positive.

$$\forall x \geq 2, f'(x) = -\frac{\ln^3(x) + 3\ln^2(x)}{x^2 \ln^2(x)} < 0$$

Donc la fonction f est décroissante et positive !!!

ii) On en déduit la double inégalité suivante :

$$\forall k \geq 2, \forall x \in [\![k-1, k]\!], f(k) \leq f(x)$$

$$\Longrightarrow \int_{k-1}^{k} f(k)\, dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx$$

$$\Longrightarrow f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$$

Or :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{5} f(x)dx + \cdots + \int_{n}^{n} f(x)dx$$

$$= \int_{2}^{n} \frac{1}{x\ln^3(x)}dx$$

$$= \int_{2}^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln^3(x)}dx$$

Rappel :

$$\int \frac{u'}{u^\alpha} = \int u'u^{-\alpha} = \frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{1-\alpha} \times \frac{1}{u^{\alpha-1}}$$

On a donc :

$$\int_{2}^{n+1} \frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(x)}dx = \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{\ln^2(x)}\right]_2^{n+1} = \frac{1}{\ln^2(2)} - \frac{1}{\ln^2(n+1)}$$

On a donc :

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \frac{1}{\ln^2(2)} - \frac{1}{\ln^2(n+1)}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \frac{1}{2\ln^3(2)} + \frac{1}{\ln^2(2)} - \frac{1}{\ln^2(n+1)} \leq \frac{1}{2\ln^3(2)} + \frac{1}{\ln^2(2)}$$

La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=2}^{n} f(k)\right)$ est croissante et majorée donc elle converge !

Partie C : Séries à termes quelconques

Exercice C.1 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{e^{in}}{n^4}\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^{in}}{n^4}$$

$$\Longrightarrow |u_n| = \frac{1}{n^4}$$

On sait d'après le critère de Riemann que $\left(\sum \frac{1}{n^4}\right)$ **converge** car $4 > 1$. On en déduit donc que $\left(\sum \frac{e^{in}}{n^4}\right)$ est absolument convergente donc **convergente**.

Exercice C.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)\right)$$

On pose :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \mathbf{u_n} = \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right) &= \sin\left(\frac{\pi(n^2+2n+1)}{n+1} - \frac{(2n+1)}{n+1}\pi\right) \\
&= \sin\left(\pi(n+1) - \frac{(2n+1)}{n+1}\pi\right) \\
&= (-1)^n \sin\left(\frac{(2n+1)}{n+1}\pi\right) \\
&= \sin\left(2\pi - \frac{1}{n+1}\pi\right) \\
&= (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n+1}\pi\right)
\end{aligned}$$

Mauvaise idée : On a démontré que :

$$u_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\pi$$

Le problème c'est que l'on ne peut utiliser des critères de comparaisons que si u_n est de signe constant, au moins à partir d'un certain rang. Ici on ne peut pas.
On va prouver que si on pose la somme partielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Alors (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+2} - S_{2n} = -\sin\left(\frac{\pi}{2n+3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)$$

Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{\pi}{2n+3} \leq \frac{\pi}{2n+2} \leq \frac{\pi}{2}$$

De plus sin est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ainsi on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) \geq \sin\left(\frac{\pi}{2n+3}\right)$$

Donc la suite (S_{2n}) est croissante.
De même (S_{2n+1}) est décroissante.
Enfin on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = \sin\left(\frac{\pi}{2n+2}\right) \to 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes. Donc elles convergent vers la même limite, donc $(\boldsymbol{S_n})$ **converge**.

Exercice C.3 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)$$

On pose :

$$\forall \mathbf{n} \geq \mathbf{1}, \mathbf{u_n} = \frac{(-\mathbf{1})^{\mathbf{n}} \ln(\mathbf{n})}{\mathbf{n}}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, |u_n| = \frac{\ln(n)}{n} = f(n)$$

On pose : $f: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
On sait que f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et :

$$\forall x \geq 2, f'(x) = \frac{1 - ln(x)}{x^2}$$

On en déduit donc que f est décroissante sur $[3; +\infty[$. On en déduit donc que $(|u_n|)$ est décroissante à partir de $n \geq 3$.
De plus on a :

$$\lim_n u_n = 0 \text{ (croissance comparée)}$$

On en déduit donc que :

- (u_n) **est alternée**
- $(|u_n|)$ **est décroissante**
- $\lim_n u_n = 0$

On en déduit donc, d'après le critère spécial des séries alternées que $\left(\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)$ converge.

Remarque : Le critère spéciale des séries alternées n'étant plus au programme, on démontre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes comme dans l'exercice précédent.

Exercice C.4 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}\right)$$

Ici on ne peut pas utiliser le critère des séries alternées car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, |u_n| = \frac{1}{n + (-1)^n}$$

On procède différemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}}$$

On sait que :

$$\frac{(-1)^n}{n} \to 0$$

On peut donc faire un développement limité d'ordre 1 :

$$\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = 1 - \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow u_n = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1^er^ cas : $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

On a alors :

i) (u_n) est alternée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \times u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n} \times \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

ii) $(|u_n|)$ est décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1}| - |u_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0$$

iii) $\lim_n u_n = 0$

En effet :

$$\lim_n \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Donc la série $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

$2^{\text{ième}}$ cas : $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ converge
C'est le critère de Riemann.

$3^{\text{ième}}$ cas : $\left(\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ converge
C'est aussi le critère de Riemann.

On en déduit donc que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\right)$ **converge**.

Partie D : Un peu plus dur

Exercice B.1 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\right)$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$$

On sait que :

$$\begin{aligned} n^3+1 &= n(n^2+1)-n-1 \\ \Rightarrow \frac{n^3+1}{n^2+1} &= n-\frac{n+1}{n^2+1} \\ \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \sin\left(\pi\left(n-\frac{n+1}{n^2+1}\right)\right) \\ &= -\sin\left(\frac{n+1}{n^2+1}\pi\right) \\ &\Rightarrow u_n \sim -\frac{1}{n}\pi \end{aligned}$$

On sait que la série $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge donc $\left(\sum \sin\left(\pi\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\right)$ **diverge**.

Exercice B.2 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}\right)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_n &= \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n} \\ &= \frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \frac{1}{n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

On sait que la série $\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ converge d'après le critère des séries alternées. On en déduit donc que :

Si $(\sum u_n)$ converge alors il en serait de même de $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$. Or comme nous le savons cette suite diverge. Donc la suite $(\sum u_n)$ diverge.

Exercice B.3 : Déterminer la nature de :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right)$$

On pose :

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$$

On sait que :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Si $\alpha > 1$ alors la série $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right)$ converge.

Si $\alpha \leq 0$ alors :

$$\lim_n u_n \neq 0$$

Donc la série diverge grossièrement.

Soit $0 < \alpha \leq 1$

On a :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{(-1)^n}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

On sait que $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge d'après le critère spécial. On en déduit donc que :

$\left(\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right)$ **converge** si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$ d'après le critère de Riemann.

Exercice B.4 : a) Soit *x* réel et n un entier naturel. Montrer que :

$$\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que la série suivante converge :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

Puis calculer sa somme.

c) Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t > 0, \sum_{k=0}^{n} (-t)^{2k} = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-t)^{2k} = \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \forall x \geq 0, \int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-t)^{2k}\right) dt = \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\, dt$$

$$\Longrightarrow \left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2x+1}\right| \leq \left|\int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\, dt\right|$$

$$\leq \int_0^x \left|\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\right| dt$$

$$\leq \int_0^x t^{2n+2}\, dt$$

On en déduit donc que :

$$\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2x+1}\right| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$$

On fait de même avec $x < 0$.

b) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

On peut voir que si $|x| > 1$ alors $\lim_n |u_n| = +\infty$ donc la série converge grossièrement.

Si $x \in]-1; 1]$ alors la série vérifie le critère spécial donc est convergente.

Si $x = -1$ alors $u_n(x) = \frac{1}{2n+1}$ donc la série diverge.

On en déduit donc que :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2x+1}\right) \text{converge si et seulement si } x \in]-1; 1]$$

On sait que :

$$\forall x \in]-1; 1], \text{on a} \lim_n \left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2x+1}\right| \leq \lim_n \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

Or on sait que :

$$\lim_n \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_n \left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2x+1}\right| = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in]-1; 1], \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$$

c) Il suffit de prendre $x = 1$ et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$