Fiche exercices 25 : Applications linéaires

Partie A : Généralité

Exercice A.1 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (2x+y; x-y) \end{cases}$$

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y) \mapsto (y,0,x-y,2) \end{cases}$$

On a :

$$\forall (e_1,e_2) \in (\mathbb{R}^2)^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{on pose } e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{f(\lambda e_1 + e_2)} &= f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2(\lambda x_1 + x_2) + (\lambda y_1 + y_2) \\ (\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 2x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\lambda f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)} \end{aligned}$$

Donc **f est linéaire**.

On peut voir que la deuxième n'est pas linéaire car :

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Donc **f n'est pas linéaire**.

Exercice A.2 : Démontrer que les applications suivantes sont linéaires :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto \big(P(0); P(2)\big) \end{cases}$$

$$A \in M_n(\mathbb{R});\ g_A:\begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases}$$

On a :

$\forall (P_1,P_2) \in (\mathbb{R}[X])^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{f(\lambda P_1 + P_2)} &= \big((\lambda P_1 + P_2)(0); (\lambda P_1 + P_2)(2)\big) \\ &= \big(\lambda P_1(0) + P_2(0), \lambda P_1(2) + P_2(2)\big) \\ &= \lambda\big(P_1(0); P_1(2)\big) + \big(P_2(0); P_2(2)\big) \\ &= \boldsymbol{\lambda f(P_1) + f(P_2)} \end{aligned}$$

Donc **f est linéaire**.

De même on a :

$\forall (M_1,M) \in (M_n(\mathbb{R}))^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{g_A(\lambda M_1 + M_2)} &= A(\lambda M_1 + M_2) - (\lambda M_1 + M_2)A \\ &= \lambda(AM_1 - M_1A) + (AM_2 - M_2A) \\ &= \boldsymbol{\lambda g(M_1) + g(M_2)} \end{aligned}$$

Donc **g est linéaire**.

Exercice A.3 (Endomorphismes nilpotents) : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
a) Montrer qu'il existe x dans E tel que $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
b) Montrer que la famille $(x, f(x); \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.
c) Déterminer un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie cette propriété $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

a) Il suffit de raisonner par contraposée. Si on a :

$$\forall x \in E, f^{n-1}(x) = 0_E \Longrightarrow f^{n-1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Cela est absurde. Donc on a :

$$\exists x \in E, f^{n-1}(x) \neq 0_E$$

b) Comme la famille $(x, f(x); \dots, f^{n-1}(x))$ contient n vecteurs, il suffit de montrer qu'elle est libre pour qu'elle forme une base de E.
On résout :

$$\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0_E$$
$$\Longrightarrow f^{n-1}\big(\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x)\big) = f(0_E)$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f^{n-1+k}(\lambda_k x) \ = 0_E$$
$$\Longrightarrow f^{n-1}(\lambda_1 x) = 0_E \text{ car } \forall k \geq 1, f^{n-1+k} = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow f^{n-1+k}(\lambda_k x) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lambda_1 f^{n-1}(x) = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = 0$$
$$\Longrightarrow \lambda_2 f(x) + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0_E$$

On réitère le même procédé que précédemment avec f^{n-2} pour en déduire que $\lambda_2 = 0$, puis f^{n-3} pour en dédurie que $\lambda_3 = 0 \dots$
On a donc :

$$\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \cdots + \lambda_n f^{n-1}(x) = 0_E \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], \lambda_i = 0$$

On en déduit donc que la famille $(x, f(x); \dots, f^{n-1}(x))$ est libre. De plus elle a même cardinal que E donc c'est une base de E :

$$\begin{cases} (x, f(x); \dots, f^{n-1}(x)) \text{ est libre de E} \\ \quad \text{Card}(\mathcal{B}) = n = \dim(E) \end{cases} \Longrightarrow \ (x, f(x); \dots, f^{n-1}(x)) \text{ est une base de E}$$

c) On peut poser :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] - \mathbb{R}_2[X] \\ \quad P \mapsto P' \end{cases}$$

On a alors :

$$f^2(X^2) = 2 \neq \ \text{ et } \forall P \in \mathbb{R}_2[X], f^{(3)}(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Exercice A.4 : On pose :

$$f\!: \begin{cases} \qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - 4y; 2y) \end{cases}$$

Déterminer : $f^{20}((2, -3))$

On peut faire un programme Python pour illustrer cette application :

```python
def f(x,y):
    return (2*x-4*y,2*y)

def reiteration(n,a,b):
    u=[(a,b)]
    for i in range(n):
        u.append(f(u[i][0],u[i][1]))
    return u
```

```
>>> reiteration(20,2,-3)
[(2, -3),
 (16, -6),
 (56, -12),
 (160, -24),
 (416, -48),
 (1024, -96),
 (2432, -192),
 (5632, -384),
 (12800, -768),
 (28672, -1536),
 (63488, -3072),
 (139264, -6144),
 (303104, -12288),
 (655360, -24576),
 (1409024, -49152),
 (3014656, -98304),
 (6422528, -196608),
 (13631488, -393216),
 (28835840, -786432),
 (60817408, -1572864),
 (127926272, -3145728)]
```

On doit trouver :

$$f^{20}\big((2,-3)\big) = (127926272, -3145728)$$

On va chercher une expression de $f^n\big((x,y)\big)$ en fonction de (x,y). Il suffira de remplacer ensuite n par 20 et (x,y) par $(2,-3)$.

<u>Méthode 1 : Par récurrence.</u>

On doit conjecturer $f^n\big((x,y)\big)$ puis le démontrer par récurrence !

$$f^2 : (x,y) \overset{f}{\mapsto} (2x-4y, 2y) \overset{f}{\mapsto} \big(2(2x-4y) - 4(2y), 2(2y)\big) = (4x-16y, 4y)$$

$$\Longrightarrow f^3 : (4x-16y, 4y) \overset{f}{\mapsto} (2(4x-16y) - 4(4y), 2(4y)) = (8x-48y, 8y)$$

On peut conjecturer que :

$$f^n : (x,y) \mapsto (2^n x - u_n y, 2^n y)$$

On démontre ça par récurrence et on va déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n qui nous permettra (on l'espère !) de trouver une expression de u_n en fonction de n !

Initialisation : Pour n=0.

On a :

$$f^0 = Id_{\mathbb{R}^2} : (x,y) \mapsto (x,y)$$

De plus on a :

$$(x,y) \mapsto (2^0 x - u_0 y, 2^0 y) = (x - u_0 y, y)$$

La proposition est vraie avec $u_0 = 0$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé. On suppose que :

$$f^n : (x,y) \mapsto (2^n x - u_n y, 2^n y)$$

On a alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f^{n+1}\big((x,y)\big) = f\Big(f^n\big((x,y)\big)\Big)$$

$$f^{n+1} : \underbrace{(x,y) \underbrace{\overset{f}{\mapsto}}_{1} (2x-4y, 2y) \underbrace{\overset{f}{\mapsto}}_{2} \dots \underbrace{\overset{f}{\mapsto}}_{n} (2^n x - u_n y, 2^n y)}_{f^n} \underbrace{\overset{f}{\mapsto}}_{n+1} ?$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f\Big(f^n\big((x,y)\big)\Big) &= \big(2(2^n x - u_n y) - 4(2^n y), 2(2^n y)\big) \\ &= (2^{n+1} x - (2u_n + 4 \times 2^n) y, 2^{n+1} y) \\ &= (2^{n+1} x - u_{n+1} y, 2^{n+1} y) \end{aligned}$$

Ainsi la proposition est héréditaire avec :

$$u_{n+1} = 2u_n + 4 \times 2^n$$

Conclusion : On conclut d'après le principe de récurrence !

Il nous reste à trouver u_n en fonction de n !

ATTENTION : u_n n'est pas de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$! Ce n'est pas une suite arithmético-géométrique !

On peut regarder les premiers termes :

```
def suite(n):
    u=[0]
    for i in range(n):
        u.append(2*u[i]+4*2**i)
    return (u)
```

```
>>> suite(5)
[0, 4, 16, 48, 128, 320]
```

On ne parvient pas à conjecturer une hypothèse de récurrence !

On a :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} = 2u_n + 4 \times 2^n \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+2} = 2u_{n+1} + 4 \times 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2u_{n+1} + 2 \times (4 \times 2^n)\\ &= 2u_{n+1} + 2 \times (u_{n+1} - 2u_n)\\ &= 4u_{n+1} - 4u_n\end{aligned}$$

On a donc la relation suivante :

$$u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$$

On résout l'équation caractéristique :

$$(E_q) : r^2 - 4r + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (r-2)^2 = 0$$

On a une unique solution qui est $r = 2$.
On en déduit donc que :

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)2^n$$

Il reste à trouver A et B !
On sait que :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 4$$

On a donc :

$$u_0 = B = 0 \text{ et } u_1 = 2A = 4$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n2^{n+1}$$

On a donc :

$$\mathbf{f^n : (x, y) \mapsto \left(2^n x - n2^{n+1} y, 2^n y\right)}$$

On a donc :

$$f^{20} : (2, -3) \mapsto \left(2^{20} \times 2 - 20 \times 2^{21}(-3), 2^{20}(-3)\right) = (127926272, -3145728)$$

On retrouve bien ce que l'on a trouvé précédemment avec Python !

Méthode 2 : Binôme de Newton

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - 4y \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On a donc :

$$f = 2Id_{\mathbb{R}^2} - 4g, \text{avec } g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On sait que $Id_{\mathbb{R}^2}$ et g commutent. On peut donc appliquer le binôme de Newton pour les applications linéaires :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, f^n &= (2Id_{\mathbb{R}^2} - 4g)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4g)^k o(2Id_{\mathbb{R}^2})^{n-k}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{(-4g)^0}_{Id_{\mathbb{R}^2}} o(2Id_{\mathbb{R}^2})^n + \binom{n}{1}(-4g)^1 o(2Id_{\mathbb{R}^2})^{n-1} + \binom{n}{2}(-4g)^2 o(2Id_{\mathbb{R}^2})^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}(-4g)^n o(2Id_{\mathbb{R}^2})^0$$

$$= 2^n Id_{\mathbb{R}^2} + n(-4g)o2^{n-1}Id_{\mathbb{R}^2}$$

Remarque : On a :

$$g^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $g^2 = gog = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$. On a donc (par une récurrence triviale !) :

$$\forall n \geq 2, g^n = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = 2^n Id_{\mathbb{R}^2} + n(-4g)o2^{n-1}Id_{\mathbb{R}^2}$$
$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f^n\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 4n2^{n-1}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2^n x - 2^{n+1} n y} \\ \mathbf{2^n y} \end{pmatrix}$$

Partie B : Image et noyau

Exercice B.1 : Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y+z, x-y+z, 2x+2z) \end{cases}$$

i) Recherche de $\ker(f)$

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-y+z \\ 2x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut poser $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et compter le nombre de pivots.

On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P a donc deux pivots. La matrice P n'est donc pas inversible. Il y a deux inconnues principales et une inconnue secondaire ! On peut donc en déduire que $\dim(ker(f)) = 1$. Pour trouver $\ker(f)$ on doit résoudre :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ x-y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

ii) Cherche $\mathrm{Im}(f)$

<u>Méthode 1 : On résout :</u>

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=a \\ x-y+z=b \\ 2x+2z=c \end{cases}$$

On remarque que $(L_1) + (L_2) = (L_3)$

On en déduit donc que le système $\begin{cases} x+y+z=a \\ x-y+z=b \\ 2x+2z=c \end{cases}$ admet des solutions si et seulement si $a+b=c$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + y = c\right\}$$

Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$ il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$. Par exemple :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Méthode 2 : On regarde l'image des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$

Il suffit de prendre la base canonique.

On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Exercice B.2 : Déterminer l'image et le noyau de l'application linéaire suivante :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P - XP' \end{cases}$$

i) Cherchons le noyau de f : $\ker(f)$

On résout :

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$$
$$\Longleftrightarrow P = XP'$$

On pose a_n le coefficient dominant de P : $CD(P) = a_n$. On a alors :

$$a_n = na_n$$

On en déduit donc que :

$$P = XP' \Longrightarrow n = 1$$

Réciproquement soit $P = aX + b, a \neq 0$. On a alors :

$$P' = a$$

On en déduit donc que :

$$P = XP' \Longleftrightarrow aX + b = aX \Longleftrightarrow b = 0$$

On en déduit donc que :

$$\ker(f) = \{aX, a \in \mathbb{R}\}$$

ii) On cherche $\mathrm{Im}(f)$

On pose $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. On calcule :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], f(X^k) = X^k - kX^k = (1-k)X^k$$

On a donc :

$$f(\mathcal{B}) = (1, 0, -X^2, -2X^3, \dots, -(n-1)X^n)$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(1, 0, -X^2, -2X^3, \dots, -(n-1)X^n)$$
$$= \mathrm{vect}(1, -X^2, -2X^3, \dots, -(n-1)X^n)$$

De plus on sait que la famille $(1, -X^2, -2X^3, \dots, -(n-1)X^n)$ est libre car c'est une famille de polynômes échelonnés. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im(f)} = \left\{ \mathbf{P(X)} = \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}^{n} \mathbf{a_k X^k}, (\mathbf{a_0}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Remarque : On peut montrer ici que :

$$\mathbb{R}_n[X] = \mathbf{ker(f)} \oplus \mathbf{Im(f)}$$

Exercice B.3 : Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + i\bar{z} \end{cases}$ d) $f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P - (X+1)P' \end{cases}$

a) On pose :

$$\mathbf{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x-y} \\ \mathbf{y-x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{cases}$$

i) Cherchons le noyau de f : ker(f)

On résout :

$$f((x,y)) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-x=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{ker(f)} = \{(\mathbf{x},\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbf{vect}((\mathbf{1},\mathbf{1}))$$

ii) On cherche Im(f)

Soit $a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$f((x,y)) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{-x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{x} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbf{vect}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right)$$

b) On pose :

$$\mathbf{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{2x-y-z} \\ \mathbf{-x+2y+z} \end{pmatrix} \end{cases}$$

i) Cherchons le noyau de f : ker(f)

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = 0_{\mathbb{R}^2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z \\ y = -\frac{1}{3}z \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{ker(f)} = \{(\mathbf{x}, -\mathbf{x}, \mathbf{3x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbf{vect}((\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{3}))$$

ii) On cherche Im(f)

Méthode 1 : On résout : $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Soit a, b, c) $\in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = a \\ -x + 2y + z = b \end{cases}$$

On a une infinité de solutions. Si on pose $z = 0$ on a :

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ -x + 2y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2a + b}{3} \\ y = \dfrac{a + 2b}{3} \end{cases}$$

On en déduit donc que f est surjective. En effet :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) = f\left(\begin{pmatrix} \dfrac{2a + b}{3} \\ \dfrac{a + 2b}{3} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Donc f est surjective et :

$$\mathbf{Im(f) = \mathbb{R}^2 = vect}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right)$$

Méthode 2 : On regarde l'image d'une base de l'espace de départ par f.

On sait que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Or on a :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \subset \text{Im}(f) \cap \mathbb{R}^2$$

Or on sait que :

$\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^2$ car les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

On en déduit donc que : $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

c) On pose :

$$\mathbf{f} : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \mathbf{z \mapsto z + i\bar{z}} \end{cases}$$

i) Cherchons le noyau de f : ker(f)

On résout :

$$f(z) = 0_{\mathbb{C}}$$
$$\Leftrightarrow z + i\bar{z} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + iy) + i(x - iy) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + y = 0$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{ker(f) = \{x - ix, x \in \mathbb{R}\} = vect(1 - i)}$$

ii) On cherche Im(f)

On sait que :

$$\mathbb{C} = \text{vect}(1, i)$$

Or on a :

$$f(1) = 1 + i = f(i)$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Im}(f) = \{x + ix, x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(1 + i)$$

d) On pose :

$$\mathbf{f}: \begin{cases} \mathbb{R}_3[\mathbf{X}] \rightarrow \mathbb{R}_3[\mathbf{X}] \\ \mathbf{P} \mapsto \mathbf{P} - (\mathbf{X}+\mathbf{1})\mathbf{P}' \end{cases}$$

i) Cherchons le noyau de f : ker(f)

On résout :

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}_3[X]}$$
$$\Leftrightarrow P = (X + 1)P'$$

On pose :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$$
$$\Longrightarrow P'(X) = a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$$
$$\Longrightarrow (X + 1)P'(X) = 3a_3X^3 + (3a_3 + 2a_2)X^2 + (2a_2 + a_1)X + a_1$$

On en déduit donc que :

$$P = (X + 1)P'$$
$$\Leftrightarrow a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = 3a_3X^3 + (3a_3 + 2a_2)X^2 + (2a_2 + a_1)X + a_1$$

On identifie :

$$\begin{cases} a_0 = a_1 \\ a_1 = 2a_2 + a_1 \\ a_2 = 3a_3 + 2a_2 \\ a_3 = 3a_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_3 = 0 \\ a_1 = a_0 \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{ker(f)} = \{\boldsymbol{a_0 + a_0X, a_0} \in \mathbb{R}\} = \mathbf{vect(1 + X)}$$

ii) On cherche Im(f)

On sait que :

$$\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{vect}(1, X, X^2, X^3)$$

Or on a :

$$f(1) = 1 \text{ et :}$$
$$\forall k \in [\![1,3]\!], f(X^k) = X^k - (X + 1)kX^{k-1}$$
$$= (1 - k)X^k - kX^{k-1}$$

On a donc :

$$f(\mathcal{B}) = (1, -1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im(f) = vect(1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2)}$$

Exercice B.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$

On peut déjà remarquer que :

$$\boldsymbol{\forall f \in \mathcal{L}(E), \mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)}$$

En effet soit :

$$y \in \mathrm{Im}(f^2) \Longrightarrow \exists x \in E, f^2(x) = y$$
$$\Longrightarrow f(f(x)) = y$$
$$\Longrightarrow y \in \mathrm{Im}(f) \text{ (comme image de } f(x) \text{ par } f)$$

On doit démontrer une **équivalence**.

1er cas : $\Longrightarrow$

On suppose que :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$$

On sait déjà que :

$$\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$$

Montrons l'inclusion réciproque !
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. On a donc $x \in E, y = f(x)$
On sait que :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \ker(f)$$

On en déduit donc que :

$$\exists (x_1, x_2) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}(f), x = x_1 + x_2$$

Or on sait que :

$$x_2 \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow \exists x_3 \in E, f(x_3) = x_2$$

On en déduit donc que :

$$y = f(x) = f(x_1 + x_2) = \underbrace{f(x_1)}_{=0 \text{ car } x_1 \in \mathrm{Ker}(f)} + f(x_2) = f\big(f(x_3)\big) = f^2(x_3)$$

On en déduit donc que :

$$y \in \mathrm{Im}(f^2)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{E = Im(f) + Ker(f) \Longrightarrow Im\big(f^2\big) = Im(f)}$$

2ième cas : $\Longleftarrow$
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Im}(f)$
Soit $x \in E$. Donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f^2)$
On en déduit donc que :

$$\exists y \in E, f(x) = f^2(y)$$

On pose alors :

$$x = x - f(y) + f(y)$$

On a alors :

$$f\big(x - f(y)\big) = f(x) - f^2(y) = f(x) - f(x) = 0_E$$

On a donc :

$$x = \underbrace{x - f(y)}_{\in \ker(f)} + \underbrace{f(y)}_{\in \mathrm{Im}(f)}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im\big(f^2\big) = Im(f) \Longrightarrow E = Im(f) + ker(f)}$$

On en déduit donc l'équivalence suivante :

$$\mathbf{Im\big(f^2\big) = Im(f) \Longleftrightarrow E = Im(f) + ker(f)}$$

Exercice B.5: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$$

On peut déjà remarquer que :

$$\forall \mathbf{f} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbf{E}), \ker(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$$

En effet soit :

$$\begin{aligned} x \in \ker(f) &\Longrightarrow f(x) = 0_E \\ &\Longrightarrow f\big(f(x)\big) = 0_E \\ &\Longrightarrow f^2(x) = 0_E \\ &\Longrightarrow x \in \ker(f^2) \end{aligned}$$

On doit démontrer une **équivalence**.
1er cas : $\Longrightarrow$
On suppose que :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}$$

On sait déjà que :

$$\ker(f) \subset \ker(f^2)$$

Montrons l'inclusion réciproque !
Soit $x \in \ker(f^2)$. On a donc $f^2(x) = 0_E$
On a donc :

$$f\big(f(x)\big) = 0_E$$

On en déduit donc que :

$$f(x) \in \operatorname{Im}(f) \cap \ker(f) \Longrightarrow f(x) = 0_E \Longrightarrow x \in \ker(f) \Longrightarrow \ker(f^2) \subset \ker(f)$$

On a donc :

$$\mathbf{Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\} \Longrightarrow Ker(f) = Ker(f^2)}$$

2ième cas : $\Longleftarrow$

On suppose que : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$

Soit $x \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f)$.

On a alors :

$$\exists y \in E, f(y) = x \text{ et } f(x) = 0_E \Longrightarrow f^2(y) = 0_E \Longrightarrow f(y) = x = 0_E$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{Ker(f) = Ker(f^2) \Longrightarrow Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}}$$

On en déduit donc l'équivalence suivante :

$$\mathbf{Ker(f) = Ker(f^2) \Longleftrightarrow Im(f) \cap Ker(f) = \{0_E\}}$$

Exercice B.6 : On pose :

$$\Delta: \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

a) Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.

b) Démontrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.

c) Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_n[X], P(X+1) - P(X) = Q(X)$$

a) On pose

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, a_n \neq 0$$

<u>1er cas</u> : deg(P) = n ≥ 1

$$P(X+1) = a_n (X+1)^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+1)^k$$

$$= a_n X^n + n a_n X^{n-1} + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (X+1)^k + \sum_{k=0}^{n-2} a_k (X+1)^k$$

$$= a_n X^n + n a_n X^{n-1} + a_{n-1} X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} b_k X^k$$

$$\Longrightarrow P(X+1) - P(X) = n a_n X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} c_k X^k$$

On en déduit donc que :

$$\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$$

2ième cas : deg(P) ≤ 0

On a alors :

$$\Delta(P) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\deg(\Delta(P))} = \begin{cases} \mathbf{\deg(P) - 1 \text{ si } \deg(P) \geq 1} \\ \mathbf{-\infty \text{ si } \deg(P) \leq 0} \end{cases}$$

b) On a deux choses à faire.

i) Montrons que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.

$$\forall (P_1, P_2) \in (\mathbb{R}[X])^2, \lambda \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\Delta(\lambda P_1 + P_2)} = (\lambda P_1 + P_2)(X+1) - (\lambda P_1 + P_2)(X)$$

$$= \lambda P_1(X+1) + P_2(X+1) - (\lambda P_1(X) + P_2(X))$$

$$= \lambda(P_1(X+1) - P_1(X)) + (P_2(X+1) - P_2(X))$$

$$= \boldsymbol{\lambda\Delta(P_1) + \Delta(P_2)}$$

Donc Δ est linéaire.

ii) Cherchons $\ker(\Delta)$.

On résout :

$$\boldsymbol{\Delta(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}}$$
$$\Longrightarrow P(X+1) = P(X)$$

On en déduit donc par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = P(0)$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n} P(n) = P(0)$$

Or on sait que si $\deg(P) \geq 1$ on a :

$$\lim_{x\to+\infty} |P(x)| = +\infty$$

On en déduit donc que $\deg(P) \leq 0$.

De plus on sait que :

$$\forall P \in \mathbb{R}, P(X+1) = P(X)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\ker(\Delta) = \mathbb{R}}$$

c) Il faut déterminer $\mathrm{Im}\left(\Delta|_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$

On sait que $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. On a alors :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \Delta\left(X^k\right) = (X+1)^k - X^k$$
$$\Longrightarrow f(\mathcal{B}) = \left(0,1,2X+1,3X^2+3X+1,\dots,\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k\right)$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Im}\left(\Delta|_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = \mathrm{vect}\left(\left(1,2X+1,3X^2+3X+1,\dots,\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^k\right)\right) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \exists P \in \mathbb{R}_n[X], P(X+1) - P(X) = Q(X)}$$

Exercice B.7 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z) \end{cases}$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Il faut prouver que f est un **endomorphisme bijective.**

i) $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$

On a :

$$\forall (e_1,e_2) \in (\mathbb{R}^3)^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \text{on pose } e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\boldsymbol{f(\lambda e_1 + e_2)} = f\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) \\ 4(\lambda x_1 + x_2) - (\lambda y_1 + y_2) \\ -2(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) + 3(\lambda z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$
$$= \lambda\begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ 4x_1 - y_1 \\ -2x_1 + 2y_1 + 3z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 \\ 4x_2 - y_2 \\ -2x_2 + 2y_2 + 3z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathbf{\lambda f(e_1) + f(e_2)}$$

On en déduit donc que f est linéaire. C'est donc un **endomorphisme**.

ii) On cherche $\mathbf{ker(f)}$

On résout :

$$\mathbf{f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x - y = 0 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a trois pivots. Donc la matrice est inversible.

On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathbf{ker(f)} = \left\{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right\}$

Donc l'application est **injective**.

Remarque : Ici il n'est pas nécessaire de prouver la bijective. Un endomorphisme injectif est bijectif ! Je montre que f est surjective pour vous donner plus d'entrainement pour chercher l'image de f. Mais ce n'est pas nécessaire ! Tout dépend si vous avez vu le résultat du cours partie B :

Propriété I.b.3 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie de même dimension et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors équivalence entre :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

iii) f est surjective.

On peut démontrer que f est surjective de deux façons, ou bien juste utiliser qu'un endomorphisme injectif en dimension finie est bijectif, ce qui est tout de même plus simple !!

Méthode 1 : Montrons que f est surjective en trouvant f^{-1}

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = a \\ 4x - y = b \\ -2x + 2y + 3z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Ainsi on obtient que :

$$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \exists! \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc f est bijective. (On n'a même pas besoin du ii) avec cette méthode !)

Pour trouver f^{-1} il faut trouver $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$!

On peut faire l'algorithme de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{9}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{9}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y, \frac{4}{9}x - \frac{1}{9}y, -\frac{2}{9}x + \frac{2}{9}y + \frac{1}{3}z\right) \end{cases}$$

On remarque que :

$$P^{-1} = \frac{1}{9}P$$

On aurait pu le voir en calculant :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$$

On a donc f **bijective**, donc c'est un **automorphisme** !

Méthode 2 : On peut montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

Pour cela on peut regarder l'image des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

Il faut ensuite montrer que $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $\#B = 3$, il suffit de montrer qu'elle est libre, ce qui revient à résoudre :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 4\lambda_1-\lambda_2=0\\ -2\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0 \text{ (d'aprèsle calcul du noyau de f)}$$

Donc la famille est **libre** et de **cardinal 3**, c'est donc une **base** de $\mathbb{R}^3$. Donc on a $\mathbf{Im(f)}=\mathbb{R}^3$. Donc f est **surjective**.

Donc f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice B.8 : On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]\\ P\mapsto P''\end{cases}$$

Déterminer l'image et le noyau de f.

i) On cherche $\ker(f)$

On résout :

$$f(P)=0_{\mathbb{R}_n[X]}$$
$$\Longleftrightarrow P''=0_{\mathbb{R}_n[X]}$$
$$\Longleftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2, P(X)=aX+b$$

On a donc :

$$\mathbf{ker(f)=\mathbb{R}_1[X]}$$

ii) On cherche $\mathrm{Im}(f)$

On peut regarder les images par f des vecteurs de la base canonique :

$$\forall k\in[\![2,n]\!], f(X^k)=k(k-1)X^{k-2}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}(2,6X,\dots,n(n-1)X^{n-2})=\mathbb{R}_{n-2}[X]$$

$(2,6X,\dots,n(n-1)X^{n-2})$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

On a donc :

$$\mathbf{Im(f)=vect(2,6X,\dots,n(n-1)X^{n-2})=\mathbb{R}_{n-2}[X]}$$

Exercice B.9 : On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]\\ P\mapsto P(X)-XP'(0)-X^2P''(0)\end{cases}$$

Déterminer l'image et le noyau de f.

i) On cherche $\ker(f)$

On résout :

$$f(P)=0_{\mathbb{R}_n[X]}$$
$$\Longleftrightarrow P(X)-XP'(0)-X^2P''(0)=0_{\mathbb{R}_n[X]}$$

Si $\deg(P)\geq 3$ alors :

$$\deg\left(P(X)-XP'(0)-X^2P''(0)\right)=\deg(P)\geq 3$$

Donc $P\in\ker(f)\Longrightarrow \deg(P)\leq 2$

On pose :

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

On a donc :

$$P(X) - XP'(0) - X^2P''(0) = a_0 + a_1X + a_2X^2 - a_1X - 2a_2X^2$$
$$= -a_2X^2 + a_0$$

On en déduit donc que :

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow a_2 = a_0 = 0$$

On a donc :

$$\mathbf{\ker(f) = \{\lambda X, \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

ii) On cherche $\mathrm{Im}(f)$

On peut regarder les images par f des vecteurs de la base canonique :

$$\forall k \in [\![3, n]\!], f(X^k) = X^k - X \times k \times 0^{k-1} - X^2k(k-1) \times 0^{k-2} = X^k$$
$$f(X^2) = X^2 - 2X^2 = -X^2 \text{ et } f(1) = 1$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(1, -X^2, X^3 \dots, X^n)$$

$(1, -X^2, X^3 \dots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$ et génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

On a donc :

$$\mathbf{\mathrm{Im}(f) = (1, -X^2, X^3 \dots, X^n) = \left\{P(X) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^{n} a_iX^i, (a_0, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\right\}}$$

Exercice B.10 : Soient E,F,G trois espaces vectoriels, $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :
a) $\ker(gof) = f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))$
b) $f^{-1}(\ker(g)) = f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))$

a) C'est une égalité d'ensemble. On le prouve donc par double inclusion.

i) $\ker(gof) \subset f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))$

Soir $\mathbf{x \in \ker(gof)}$

$$\Longrightarrow gof(x) = 0_E$$
$$\Longrightarrow g(f(x)) = 0_E$$
$$\Longrightarrow f(x) \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$$
$$\Longrightarrow \mathbf{x \in f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\ker(gof) \subset f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))}$$

ii) $f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)) \subset \ker(gof)$

Soit $\mathbf{x \in f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))}$

$$\Longrightarrow f(x) \in \ker(g)$$
$$\Longrightarrow g(f(x)) = 0_E$$
$$\Longrightarrow \mathbf{x \in \ker(gof)}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)) \cap \ker(gof)}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{\ker(gof) = f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))}$$

b) C'est une égalité d'ensemble. On le prouve donc par double inclusion. Ici on va raisonner par **équivalence** directement !

On sait que :

$$\ker(gof) = f^{-1}(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f))$$

On doit donc prouver que :

$$\ker(gof) = f^{-1}(\ker(g))$$

Soit $x \in \ker(gof)$. On a donc :

$$g\big(f(x)\big) = 0_E$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in \ker(g)$$
$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\ker(g))$$

On a donc :

$$f^{-1}\big(\ker(g)\big) = f^{-1}\big(\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)\big)$$

Exercice B.11 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\underline{\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ une application linéaire définie par :

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3, u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3, u(e_3) = 3f_1 - f_3, u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3$$

1) Déterminer l'image du vecteur $x = (2,6,5,-1)$ par u.
2) D'une façon générale déterminer l'image par u du vecteur $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$
3) Déterminer une base de $\ker(u)$ et sa dimension.
4) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$ et sa dimension.

1) On sait que u est linéaire. De plus on a :

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathbf{u}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}\right) = u(x) = u\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 6u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 5u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{30} \\ \mathbf{6} \\ \mathbf{-24} \end{pmatrix}$$

2) De la même façon on a :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow u(x) = u\left(x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= x_1u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + x_2u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + x_3u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + x_4u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{u} : \begin{cases} & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{x_3} \\ \mathbf{x_4} \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4} \\ \mathbf{-x_1 + x_2 - 2x_4} \\ \mathbf{2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4} \end{pmatrix} \end{cases}$$

3) On résout :

$$\mathbf{u(x) = 0_{\mathbb{R}^3}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

On a un système compatible (car homogène, le second membre étant 0) de quatre inconnues et trois équations. On en déduit donc que le système admet une infinité de solutions.

On a :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = x_4 \\ -x_1 + x_2 = 2x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -5x_4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_4 \\ -5x_4 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ a deux pivots, elle n'est pas inversible et on en déduit que le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

admet deux inconnues secondaires. Donc on en déduit que :

$$\mathbf{\dim(\ker(u)) = 2 \text{ (portée par le choix de } x_3 \text{ et } x_4 \text{ par exemple !)}}$$

Il faut à présent trouver une base de $\ker(u)$.

On a :

On a donc :

$$u\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = x_4 - 3x_3 \\ -x_1 + x_2 = 2x_4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 - x_4 \\ -x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathbf{\ker(u) = vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

4) On peut utiliser ici le théorème du rang :

$$\dim(\ker(u)) + rg(u) = 4 \Longrightarrow rg(u) = 2$$

Donc u n'est pas surjective.
Si vous n'avez pas encore vu le théorème du rang on va montrer que $\dim(\mathrm{Im}\ (u)) = 2$. On a deux méthodes pour cela.

Méthode 1 : On regarde les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$u\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix};u\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};u\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix};u\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$\text{On sait que : } \mathrm{Im}(u)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}\right)$$

On a quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc la famille est liée.
On peut voir que :

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$$

De plus on a :

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}\right)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\right)$ est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires !
On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im(u)=vect}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{1}\\\mathbf{-3}\end{pmatrix}\right)\ \mathbf{et\ dim(Im(u))=2}$$

Méthode 2 : On résout

$$u\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=a\\-x_1+x_2-2x_4=b\\2x_1-3x_2-x_3+5x_4=c\end{cases}$$

Ici ce système n'est pas homogène donc n'admet pas nécessairement de solution !
On peut remarquer que :

$$-\frac{1}{3}(x_1+2x_2+3x_3-x_4)-\frac{7}{3}(-x_1+x_2-2x_4)=2x_1-3x_2-x_3+5x_4$$

Pour que le système soit compatible on doit donc avoir :

$$-\frac{1}{3}a-\frac{7}{3}b=c$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in \mathrm{Im}(u)\Leftrightarrow -a-7b-3c=0$$

On a donc :

$$\mathbf{Im(u)} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x + 7y + 3z = 0} \right\}$$

C'est donc un plan vectoriel, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(u) = 2$

Il reste à trouver deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(u)$:

Par exemple :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathbf{Im(u) = vect}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{-7} \end{pmatrix} \right) \mathbf{\ et\ dim(Im(u)) = 2}$$

Partie C : Isomorphismes

Exercice C.1 : Pour les applications suivantes, déterminer $\mathrm{Ker}(f_i)$ et $\mathrm{Im}(f_i)$ et en déduire si ce sont des isomorphismes :

a) $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x - y) \end{cases}$

b) $f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \end{cases}$

c) $f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto (y, 0, x - 7y, x + y) \end{cases}$

d) $f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \end{cases}$

a) On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x - y) \end{cases}$$

Il suffit de montrer que f est injective car c'est un endomorphisme !

i) On cherche $\ker(f)$.

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc f est injective, donc surjective car c'est un endomorphisme.

On en déduit donc que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

ii) On a ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$$

b) On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, y - z, x + y) \end{cases}$$

Il suffit de montrer que f est injective car c'est un endomorphisme !

On cherche $\ker(f)$. On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc 2 pivots ! Le système compatible $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ (car homogène !) admet donc une infinité de solutions !

On en déduit donc que :

$$\ker(f) \neq \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Donc f n'est pas injective, donc n'est pas surjective car c'est un endomorphisme.
On en déduit donc que f n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On peut chercher alors $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$!

i) On cherche $\ker(f)$

On sait que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} (\text{car } 2L_3 - L_1 = L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases}$$

On a donc :

$$\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

ii) On cherche à présent $\mathrm{Im}(f)$.

On sait d'après le théorème du rang que :

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}\,(f) = 3$$
$$\Longrightarrow \mathrm{rg}(f) = 2$$

Pour trouver l'image de f, on peut appliquer deux méthodes.

Méthode 1 : On regarde les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$:

On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut d'arrêter là car on sait que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ et on a ici deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$.

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Mais cela ne coûte rien de le vérifier dans cette correction :

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Or on voit que :

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathbf{Im(f) = vect}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\right) = \mathbf{vect}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\right)$$

Méthode 2 : On résout

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+y+z=a\\ y-z=b\\ x+y=c\end{cases}$$

Ce système n'est pas nécessairement compatible ! On sait que :

$$2(x+y)-(2x+y+z)=y-z$$

On en déduit que : $\begin{cases}2x+y+z=a\\ y-z=b\\ x+y=c\end{cases}$ admet des solutions si et seulement si $2c-a=b$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, x+y-2z=0\right\}$$

Pour trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$ il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Im}(f)$. Par exemple :

$$e_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \text{ et } e_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathbf{Im(f) = vect}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{2}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\right)$$

c) On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4\\(x,y)\mapsto(y,0,x-7y,x+y)\end{cases}$$

f ne peut être un isomorphisme car $\dim(\mathbb{R}^2)\neq\dim(\mathbb{R}^4)$
On peut déterminer ker (f) et Im(f)

i) On cherche ker (f).

On résout :

$$\mathbf{f}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}y\\0\\x-7y\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \mathbf{ker\ (f)}=\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\right\}$$

ii) On cherche Im(f)

On peut utiliser le théorème du rang :

$$\dim\big(\ker(f)\big)+\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^2)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{rg}(f) = 2$$

Pour trouver $\mathrm{Im}(f)$ on va regarder l'image de deux vecteurs de base de $\mathbb{R}^2$.
On a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\-7\\1\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im(f) = vect}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{-7}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}\right)$$

d) On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{cases}$$

On peut déjà conclure que ce n'est pas un isomorphisme car $\dim(\mathbb{R}^3) \neq \dim(\mathbb{R}_3[X])$

i) Cherchons ker (f)

On résout :

$$f(P) = 0_{\mathbb{R}^3}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(0) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X+1|P \\ X|P \\ X-1|P \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow P = (X+1)X(X-1)Q(X)$$

Or on sait que $\deg(P) \leq 3$. On en déduit donc que $\deg(Q) \leq 0$ donc Q est constant.
On en déduit donc que :

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, P(X) = \lambda(X+1)X(X-1)$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \{\lambda(X+1)X(X-1), \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}\big((X+1)X(X-1)\big)$$

On a donc :

$$\dim(\ker(f)) = 1$$

ii) On cherche Im(f)

En utilisant le théorème du rang on en déduit que :

$$\mathrm{rg}(f) = 3 \Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3 = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

On peut le prouver aussi de deux autres méthodes.

<u>Méthode 1 : On regarde les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$:</u>

On a $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a donc :

$$f(1) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f(X) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, f(X^2) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, f(X^3) = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Il reste à montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre. On résout :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ et :

$$\mathbf{Im(f)}=\mathbb{R}^3$$

Donc f est surjective.

Méthode 2 : On résout

$$f(P)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Or on a:

$$f\left(-\frac{1}{2}aX(X-1)-b(X-1)(X+1)+\frac{1}{2}cX(X+1)\right)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

Donc f est surjective et $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$.

Exercice C.2 : Déterminer la dimension de :

$$U=\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n\}$$

On construit un isomorphisme entre U et $\mathbb{R}^3$. On pose :

$$f:\begin{cases}U\to\mathbb{R}^3\\ (u_n)\mapsto\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\end{pmatrix}\end{cases}$$

Montrons que f est un isomorphisme.
i) f est injective
En effet il suffit de résoudre :

$$f\big((u_n)\big)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n\\ u_0=u_1=u_2=0\end{cases}$$

Montrons que $(u_n)=0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ par récurrence.
On pose la proposition suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathcal{P}(n):\text{"}u_n=0=u_{n+1}=u_{n+2}\text{"}$$

Initialisation : Pour $n=0$ la proposition est vérifiée.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, fixé. On suppose vraie $\mathcal{P}(n)$. On a alors :

$$u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n=0$$
$$\Longrightarrow u_{n+3}=0=u_{n+1}=u_{n+2}$$

Donc la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : On conclut avec le principe de récurrence.
On en déduit donc que :

$$\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$$

Donc f est injective.

ii) Montrons que f est surjective.

$\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ u_2 = c \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$$

On a alors :

$$f\big((u_n)\big) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Donc f est surjective.

Donc f est un isomorphisme et $\dim(u) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Exercice C.3 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de ker(f) dans E. Montrer que G et Im(f) sont isomorphes.

On a :

$$E = \ker(f) \oplus G$$

On pose :

$$\varphi : \begin{cases} G \to \operatorname{Im}(f) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

On veut montrer que φ est un isomorphisme.

i) φ est linéaire car f est linéaire.

ii) f est injective

On résout :

$$\begin{aligned} & f(x) = 0_E \\ \Longrightarrow\ & x \in G \cap \ker(f) \\ \Longrightarrow\ & x = \{0_E\} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\ker(f) = \{0_E\}$$

Donc f est injective.

iii) f est surjective

Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. On a alors :

$$\begin{aligned} & \exists x \in E, f(x) = y \\ \Longrightarrow\ & \exists (x_1, x_2) \in \ker(f) \times G, f(x) = f(x_1 + x_2) \\ & = f(x_1) + f(x_2) \\ & = f(x_2) \end{aligned}$$

Donc f est surjective.

On en déduit donc que f est **bijective**, c'est donc un **isomorphisme**. Donc G et Im(f) sont isomorphes.

Partie D : Endomorphismes définie sur une base, sur des sous-espaces supplémentaires

Exercice D.1 : On pose $F = \operatorname{vect}\big((1,0,0)\big), G = \operatorname{vect}\big((1,1,0), (1,1,1)\big)$.

a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\forall u \in F, f(u) = 2u, \forall v \in G, f(v) = -v$$

b) Expliciter cet endomorphisme.

a) On pose :

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On sait que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille **libre** de $\mathbb{R}^3$. En effet si on résout :

$$\boldsymbol{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0}$$

On en déduit donc que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Comme #B = 3 = dim($\mathbb{R}^3$) on en déduit que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi on a :

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$$
$$\Longrightarrow f(x) = f(x_1) + f(x_2)$$
$$= 2x_1 - x_2$$

Ainsi f est entièrement déterminé.

Il reste à montrer **l'unicité**.

On suppose qu'il existe une application linéaire g tel que :

$$\forall u \in F, g(u) = 2u, \forall v \in G, g(v) = -v$$

On pose :

$$h = f - g$$

On a alors :

$$\forall x \in E, h(x) = h(x_1 + x_2)$$
$$= h(x_1) + h(x_2)$$
$$= f(x_1) - g(x_1) + f(x_2) - g(x_2)$$
$$= 2x_1 - 2x_1 + (-x_2) + x_2$$
$$= 0_{\mathbb{R}^3}$$

Donc $g = f$. On a bien unicité de f !

b) Il faut décomposer un vecteur $e = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. On a :

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{(x-y)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{(y-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in G}}$$

On en déduit donc que :

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = f\left((x-y)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + f\left((y-z)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= 2(x-y)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (z-y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2x-3y\\-y\\-z\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2x-3y\\-y\\-z\end{pmatrix} \end{cases}}$$

Exercice D.2 : On pose $F = \text{vect}\big((1,0,0)\big), G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z=0\}$.
a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :
$$\forall u \in F, f(u) = -2u, \forall v \in G, f(v) = v$$
b) Expliciter cet endomorphisme.

a) Comme dans l'exercice D1, on veut montrer que :
$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$$
Pour démontrer cela on a deux choses à faire :
i) On cherche $F \cap G$
Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$
On a alors :
$$e \in F \Longrightarrow y = z = 0$$
$$e \in G \Longrightarrow x + y + z = 0$$
On en déduit donc que :
$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G \Longrightarrow x = y = z = 0$$
On a donc :
$$F \cap G = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$
ii) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$
On sait que :
$$\dim(f) = \dim\left(\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = 1$$
De plus on sait que :
$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x+y+z=0\}$$
Intuitivement on peut voir que $\dim(G) = 2$. Mais il faut le faire « proprement ». Tout d'abord on peut voir que :
$$\dim(G) < 3 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin G$$
De plus on a :
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in G \text{ et } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in G$$
On a donc :
$$\text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \subset G \Longrightarrow \dim(G) \geq 2$$
On en déduit donc que :
$$\dim(G) = 2 \text{ et } G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
On en déduit donc que :
$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G$$
On en déduit donc que :
$$\forall x \in E, \exists (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$$
$$\Longrightarrow f(x) = f(x_1) + f(x_2)$$
$$= -2x_1 + x_2$$
Ainsi f est entièrement déterminé.
Il reste à montrer **l'unicité**.

On suppose qu'il existe une application linéaire g tel que :

$$\forall u \in F, g(u) = -2u, \forall v \in G, g(v) = v$$

On pose :

$$h = f - g$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, h(x) &= h(x_1 + x_2) \\ &= h(x_1) + h(x_2) \\ &= f(x_1) - g(x_1) + f(x_2) - g(x_2) \\ &= -2x_1 + 2x_1 + (x_2) - x_2 \\ &= 0_{\mathbb{R}^3} \end{aligned}$$

Donc $g = f$. On a bien unicité de f !

b) On sait que :

$$G = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Il faut décomposer un vecteur $e = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$. On a :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{(x+y+z)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{(-y)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + (-z)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\in G}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) &= f\left((x+y+z)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + f\left((-y)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + (-z)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \\ &= (x+y+z)\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} + (-y)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + (-z)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-2x-3y-z\\y\\z\end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\\mathbf{y}\\\mathbf{z}\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\mathbf{-2x-3y-z}\\\mathbf{y}\\\mathbf{z}\end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice D.3 : On pose $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \; f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \text{ et } f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Déterminer l'image de f, $\mathrm{Im}(f)$.

Il suffit de calculer :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

On peut voir que :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)$$

De plus les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ sont non colinéaires donc on en déduit que :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)=2$$

On peut donc en déduire que :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

On peut exprimer l'équation du plan vectoriel !

On sait que :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda+\mu\\\lambda+2\mu\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{Im}(f)\Leftrightarrow 2y-x=z$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,x-2y+z=0\right\}$$

Partie E: Endomorphismes remarquables

Exercice E.1 : On pose :

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};\ e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ e_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},F=\mathrm{vect}(e_1,e_2)\text{ et }G=\mathrm{vect}(e_3)$$

a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.
c) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèment à F.

a) On veut montrer que :

$$\mathbb{R}^3=F\oplus G$$

Pour démontrer cela on a deux choses à faire :

i) On cherche $F\cap G$

Soit $e=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in F\cap G$

On a alors :

$$e\in F\Longrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$e\in G\Longrightarrow\exists\gamma\in\mathbb{R},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$e=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in F\cap G\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\gamma=0$$

$$\Longrightarrow e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G \Longrightarrow x = y = z = 0$$

On a donc :

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

ii) $\mathbf{dim}(\mathbf{F}) + \mathbf{dim}(\mathbf{G}) = \mathbf{dim}(\mathbb{R}^3) \ = 3$

On sait que :

$$\dim(f) = \dim\left(\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = 2$$

De plus on sait que :

$$\dim(G) = \dim\left(\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\right) = 1$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}^3 = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$$

b) On doit décomposer un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

On a :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\left(x - y + \frac{z}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(y - \frac{2z}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\frac{z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

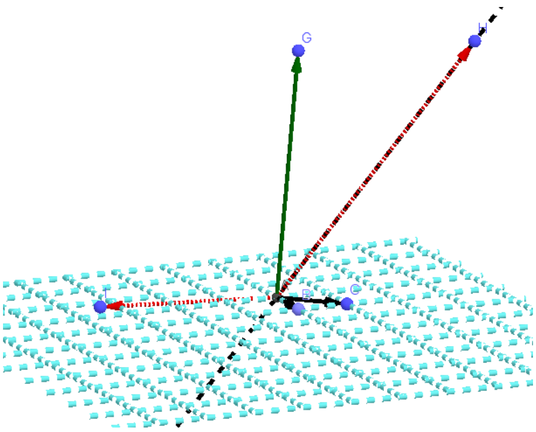
On en déduit donc que :

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - \frac{z}{3} \\ y - \frac{2z}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Illustration :

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{5}{3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} + \underbrace{\frac{8}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{10}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $p\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$



c) On a :

$$s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = -\left(x - y + \frac{z}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(y - \frac{2z}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x \\ -y + \frac{4}{3}z \\ z \end{pmatrix}$$

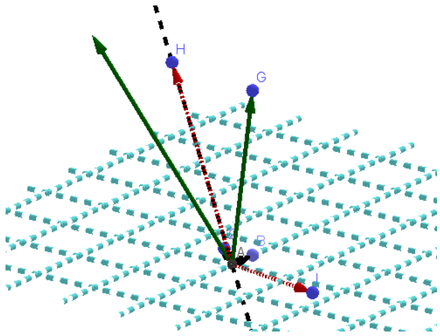
On a donc :

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ -y + \frac{4}{3}z \\ z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Illustration :

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{5}{3} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} + \underbrace{\frac{8}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{10}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{20}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$



Exercice E.2 : On pose $F = \mathrm{vect}\big((1,0,0)\big), G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}$.
a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.
c) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèment à F.

a) On veut montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Soit $e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$

On a alors :

$$e \in F \Longrightarrow y = z = 0$$
$$e \in G \Longrightarrow x + y - z = 0$$

On en déduit donc que :

$$e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G \Longrightarrow x = y = z = 0$$

On a donc :

$$F \cap G = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

ii) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

On sait que :

$$\dim(f) = \dim\left(\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = 1$$

De plus on sait que :

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = 0\}$$

Intuitivement on peut voir que $\dim(G) = 2$. Mais il faut le faire « proprement ». Tout d'abord on peut voir que :

$$\dim(G) < 3 \text{ car } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin G$$

De plus on a :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in G \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in G$$

On a donc :

$$\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset G \Longrightarrow \dim(G) \geq 2$$

On en déduit donc que :

$$\dim(G) = 2 \text{ et } G = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbb{R}^3 = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$$

b) On doit décomposer un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On a :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{(x+y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{(-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in G}$$

On en déduit donc que :

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y-z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

c) On a :

$$s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = -(x+y-z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -x-2y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathbf{s} : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\mathbf{x}-2\mathbf{y}+2\mathbf{z} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Exercice E.3 : Soit $A \in \mathbb{R}[X], A \neq 0$. On pose $f_A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application qui a tout polynôme P associe le polynôme R, reste de la division euclidienne de P par A.
Montrer que P est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

i) Montrons que f_A est un projecteur.
Il suffit de montrer que :

$$f_A^2 = f_A$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\exists!\,(Q,R) \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} P = QA + R \\ \deg(A) < \deg(P) \end{cases}$$

On a alors :

$$f_A(P) = R$$

On a donc :

$$f_A^2(P) = f_A(R)$$

Or on sait que :

$$R = A \times 0_{\mathbb{R}[X]} + R \text{ et } \deg(R) < \deg(A)$$

On a donc :

$$f_A^2(P) = f_A(R) = R = f_A(P)$$

Donc on a bien :

$$\mathbf{f_A^2 = f_A}$$

Donc f_A est un projecteur.

ii) On cherche $\mathbf{ker(f_A)}$.

On résout :

$$\begin{aligned} f_A(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} = R &\Leftrightarrow P = QA + 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\Leftrightarrow P = QA \\ &\Leftrightarrow A|P \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{ker(f_A) = \{QA, Q \in \mathbb{R}[X]\}}$$

iii) On cherche $\mathbf{Im(A)}$

On résout :

$$f_A(P) = R \Longrightarrow \deg(R) < \deg(A)$$

On en déduit donc que :

$$R \in \mathrm{Im}(f_A) \Longrightarrow R \in \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) < A\}$$

Réciproquement soit $Q \in \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) < A\}$. On a alors :

$$f_A(Q) = Q$$

Donc $Q \in \mathrm{Im}(f_A)$. On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im(f_A) = \{P \in \mathbb{R}[X], deg(P) < A\}}$$

Exercice E.4 : Soit E un espace vectoriel et p un projecteur de E.
a) Montrer que $Id_E - p$ est un projecteur.
b) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0; 1\}, p - \lambda Id_E \in GL(E)$

a) On a :

$$\begin{aligned} (Id_E - p)^2 &= (Id_E - p)o(Id_E - p) \\ &= Id_E - p - p + p^2 \\ &= Id_E - p - p + p \\ &= Id_E - p \end{aligned}$$

Donc $Id_E - p$ est un projecteur.

b) On sait que :

$$\begin{aligned} & p - \lambda Id_E \in GL(E) \\ \Longrightarrow & \ker(p - \lambda Id_E) = \{0_E\} \end{aligned}$$

On observe une condition pour qu'un vcteur e soit un élément de $\ker(p - \lambda Id_E)$:

On a :

$$\begin{aligned} x \in \ker(p - \lambda Id_E) &\Leftrightarrow (p - \lambda Id_E)(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow p(x) - \lambda x = 0_E \\ &\Leftrightarrow p(x) = x\lambda \\ &\Leftrightarrow p\big(p(x)\big) = p(x\lambda) \\ &\Leftrightarrow p(x) = \lambda p(x) \\ &\Leftrightarrow (1 - \lambda)p(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ p(x) = 0_E \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ x \in \ker(f) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{0; 1\} \end{aligned}$$

Exercice E.5 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x-y-2z \\ -2x+3y-4z \\ -x-y+3z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur et en déduire ces éléments caractéristiques.

i) On calcule fof

On a :

$$\forall e = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, fof\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x-y-2z \\ -2x+3y-4z \\ -x-y+3z \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 4(4x-y-2z)-(-2x+3y-4z)-2(-x-y+3z) \\ -2(4x-y-2z)+3(-2x+3y-4z)-4(-x-y+3z) \\ -(4x-y-2z)-(-2x+3y-4z)+3(-x-y+3z) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x-y-2z \\ -2x+3y-4z \\ -x-y+3z \end{pmatrix}$$

On a donc $fof = f$ donc f est un projecteur.

On cherche alors son noyau et son image.

ii) On cherche $\ker(f)$:

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4x-y-2z \\ -2x+3y-4z \\ -x-y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y-2z=0 \\ -2x+3y-4z=0 \\ -x-y+3z=0 \end{cases} (L_1)+(L_2)=-2(L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y-2z=0 \\ -2x+3y-4z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y=2z \\ -2x+3y=4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=2z \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\}$$

iii) On cherche $\mathrm{Im}(f) = \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)$

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y-2z=5x \\ -2x+3y-4z=5y \\ -x-y+3z=5z \end{cases} \Leftrightarrow -x-y-2z=0$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x+y+2z=0\right\}$$

Donc f est la projection sur $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x+y+2z=0\right\}$ parallèlement à $\left\{\begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice E.6 : Soit E un $\mathbb{K}-$ev, soient p et q des projecteurs de E.
a) Montrer que p+q est un projecteur si et seulement si $poq = qop = 0_{\mathcal{L}(E)}$
b) Montrer qu'alors :
$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$$
$$\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$$

a) C'est une équivalence !

1er cas : $\Longrightarrow$

On sait que $p+q$ est un projecteur. On a donc :
$$(p+q)^2 = p+q$$
$$\Longrightarrow (p+q)o(p+q) = p^2 + poq + qop + q^2 = p+q$$
$$\Longrightarrow p + poq + qop + q = p + q$$
$$\Longrightarrow poq + qop = 0_E$$
$$\Longrightarrow poq = -qop$$
On compose par p à gauche, on a alors :
$$poq = -qop$$
$$\Longrightarrow popoq = -poqop$$
$$\Longrightarrow poq = -poqop \text{ (car } p^2 = p)$$
De plus on compose à droite par p :
$$poq = -qop$$
$$\Longrightarrow poqop = -qopop$$
$$\Longrightarrow poqop = -qop$$
On en déduit donc que :
$$poq = -poqop = qop$$
On en déduit donc que :
$$poq + qop = 0_E$$
$$\Longrightarrow 2poq = 0_E$$
$$\Longrightarrow poq = 0_E$$
$$\Longrightarrow qop = 0_E$$

2ième cas : $\Longleftarrow$

On sait que :
$$poq = qop = 0_E$$
On a donc :
$$(p+q)^2 = p^2 + poq + qop + q^2$$
$$= p + q$$
On en déduit donc que $p+q$ est un projecteur.
C'est donc une équivalence.

b) Dans cette partie on sait que $p+q$ est un projecteur.

i) $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$

On veut montrer que :
$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$$
On doit donc montrer deux choses :

- $\mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) = G$
- $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$

Montrons que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe, c'est-à-dire que leur intersection est réduit à l'élément nul.
On a :
$$y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \Longrightarrow \exists (x_1, x_2) \in E^2, \begin{cases} p(x_1) = y \\ q(x_2) = y \end{cases}$$
$$\Longrightarrow p(x_1) = q(x_2)$$
$$\Longrightarrow qop(x_1) = q(x_2) = 0_E$$
$$\Longrightarrow y = 0_E$$
On a donc :
$$\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0_E\}$$

Montrons à présent que : $\mathrm{Im}(p+q)=\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$
C'est une égalité d'ensemble. Nous devons donc montrer une double inclusion.
1er cas : $\mathrm{Im}(p+q)\subset\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$
Soit $y\in\mathrm{Im}(p+q)$. Donc il existe $x\in E$ tel que $(p+q)(x)=y$

$$\Longrightarrow \underbrace{p(x)}_{\in\mathrm{Im}(p)}+\underbrace{q(x)}_{\in\mathrm{Im}(q)}=y$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(p+q)\subset\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$$

2ième cas : $\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)\subset\mathrm{Im}(p+q)$
Soit $y\in\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$. On en déduit donc que :

$$\exists(y_1,y_2)\in\mathrm{Im}(p)\times\mathrm{Im}(q), y=y_1+y_2$$
$$\Longrightarrow \exists(x_1,x_2)\in E^2, y=p(x_1)+q(x_2)$$

On compose par p et q puis on utilise que $poq=qop=0_{\mathcal{L}(E)}$:

$$p(y)=p\big(p(x_1)+q(x_2)\big)=p(x_1)$$
$$q(y)=q\big(p(x_1)+q(x_2)\big)=q(x_2)$$

On a donc :

$$y=p(y)=q(y)=(p+q)(y)$$
$$\Longrightarrow y\in\mathrm{Im}(p+q)$$

On en déduit donc que :

$$\mathbf{Im(p)+Im(q)\subset Im(p+q)}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(p+q)=\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$$

On doit démontrer que :

$$\ker(p+q)=\ker(p)\cap\ker(q)$$

C'est une égalité d'ensemble. Nous allons aussi le faire par double inclusion.
1er cas : $\ker(p+q)\subset\ker(p)\cap\ker(q)$
Soit $x\in\ker(p+q)$
On en déduit donc que :

$$(p+q)(x)=0_E$$
$$\Longrightarrow p(x)=-q(x)$$
$$\Longrightarrow qop(x)=-q(x)=0$$
$$\Longrightarrow x\in\ker(q)$$

On fait de même en composant par p. On obtient $x\in\ker(p)$
On en déduit donc que :

$$x\in\ker(p)\cap\ker(q)$$

2ième cas : $\ker(p)\cap\ker(q)\subset\ker(p+q)$
Cela est toujours vrai ! Soit $x\in\ker(p)\cap\ker(q)$. Alors $p(x)=q(x)=0_E$, on a donc :

$$p(x)+q(x)=(p+q)(x)=0_E$$

Donc $x\in\ker(p+q)$
On a donc :

$$\ker(p)\cap\ker(q)=\ker(p+q)$$

Exercice E.7 : On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}x+8y-4z\\8x+y+4z\\-4x+4y+7z\end{pmatrix}\end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur et en déduire ces éléments caractéristiques.

i) On calcule fof
On a :

$$\forall e=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=f\left(\frac{1}{9}\begin{pmatrix}x+8y-4z\\8x+y+4z\\-4x+4y+7z\end{pmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{81}\begin{pmatrix}(x+8y-4z)+8(8x+y+4z)-4(-4x+4y+7z)\\8(x+8y-4z)+(8x+y+4z)+4(-4x+4y+7z)\\-4(x+8y-4z)+4(8x+y+4z)+7(-4x+4y+7z)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

On a donc $f\circ f=\mathrm{Id}_E$ donc f est une symétrie.
On cherche alors ses éléments caractéristiques.

ii) On cherche $\ker(f-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$:

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{1}{9}\begin{pmatrix}x+8y-4z\\8x+y+4z\\-4x+4y+7z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8x+8y-4z=0\\8x-8y+4z=0\\-4x+4y-2z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 2x-2y=z$$

$$\mathbf{\ker(f-Id_{\mathbb{R}^3})}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, 2x-2y=z\right\}$$

iii) On cherche $\ker(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}10x+8y-4z=0\\8x+10y+4z=0\\-4x+4y+16z=0\end{cases}\underbrace{\Leftrightarrow}_{(L_2)-(L_1)=\frac{1}{2}(L_3)}\begin{cases}5x+3y=2z\\4x+5y=-2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}16\\-18\\13\end{pmatrix}\right)$$

On a donc :

$$\mathbf{\ker(f+Id_{\mathbb{R}^3})}=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}16\\-18\\13\end{pmatrix}\right)$$

Donc f est la symétrie par rapport à $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, 2x-2y=z\right\}$ dans la direction de $\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}16\\-18\\13\end{pmatrix}\right)$.

Partie F : Rang d'une application linéaire

Exercice F.1 : Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

a) $f:\begin{cases}\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3\\\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x-y+z+t\\x+2z-t\\x+y+3z-t\end{pmatrix}\end{cases}$ b) $g:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x+2y-2z\\x-3y+11z\\-3x+4y-18z\end{pmatrix}\end{cases}$

$$\mathbf{f}:\begin{cases}\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3\\\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x-y+z+t\\x+2z-t\\x+y+3z-t\end{pmatrix}\end{cases}$$

On peut le faire de différentes façons.

Méthode 1 : On peut utiliser le théorème du rang.

On sait que :

$$\mathbb{R}^4=\dim(\ker(f))+\mathrm{rg}(f)$$

On cherche $\ker(f)$:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 \\ x + y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = -t \\ x + 2z = t \\ x + y + 3z = t \end{cases}$$

On peut le faire de deux façons. On voit que :

$$2(x + 2z) - (x - y + z) = x + y + 3z$$

On en déduit donc que $3t = t \Longrightarrow t = 0$

De plus on a :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -z \\ x = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \\ 0 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\} \Longrightarrow \dim(\ker(f)) = 1$$

On peut aussi voir que :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}(P) = 2$ donc on en déduit que $t = 0$ et $\dim(\ker(f)) = 1$.

On en déduit que :

$\mathrm{rg}(f) = 3$ et f est surjective.

<u>Méthode 2 : Image des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^4$.</u>

On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On peut voir que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Montrons que $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a : $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\0&0&2\end{pmatrix}$

On a trois pivots donc $P\in GL_3(\mathbb{R})$ donc $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ et f est surjective.

$$\mathbf{g}\colon\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x+2y-2z\\x-3y+11z\\-3x+4y-18z\end{pmatrix}\end{cases}$$

On peut le faire de différentes façons.

<u>Méthode 1 : On peut utiliser le théorème du rang.</u>

On cherche $\ker(f)$:

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y-2z=0\\x-3y+11z=0\\-3x+4y-18z=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\x-3y+11z=0\\-3x+4y-18z=0\end{cases}$$

On pose :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-3&11\\-3&4&-18\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-4&12\\0&7&-21\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-3\\0&7&-21\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

On a deux pivots. On en déduit donc que $\dim(\ker(f))=1\Longrightarrow \mathrm{rg}(f)=2$.

<u>Méthode 2 : Image des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^4$.</u>

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix},f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-2\\11\\-18\end{pmatrix}$$

On sait que :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\11\\-18\end{pmatrix}\right)$$

Or on voit que :

$$2\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\11\\-18\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\11\\-18\end{pmatrix}\right)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\right)$$
$$\Longrightarrow \mathrm{rg}(f)=2$$

Exercice F.2 : Soit u un endomorphisme de rang1. Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $u^2=\lambda.u$

Remarque :

$$\forall u\in\mathcal{L}(E,F),\mathrm{Im}(u^2)\subset\mathrm{Im}(u)$$

En effet on a :

$$\forall y\in\mathrm{Im}(u^2),\exists x\in E,u^2(x)=y$$
$$\Longrightarrow y=u\big(u(x)\big)$$

$$\Longrightarrow y \in \mathrm{Im}(u)$$

Comme $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 1 \Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}(u^2)) \in \{0\,;1\}$

1^{er} cas : $\mathrm{rg}(u^2) = 0$

$$\Longrightarrow u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)} \Longrightarrow u^2 = 0.u$$

Donc la proposition est vraie avec $\lambda = 0$

2ième cas : $\mathrm{rg}(u^2) = 1$

On a :

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u) \\ \mathrm{rg}(u^2) = \mathrm{rg}(u) \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$$

De plus $\mathrm{rg}(u) = 1 \Longrightarrow \exists a \in E, u(a) \neq 0$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{vect}(u(a))$$

Comme $u^2(a) \in \mathrm{Im}(u^2), u^2(a) \in \mathrm{Im}(u)$ on a donc :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, u^2(a) = \lambda u(a)$$

On a donc :

$$\forall x \in E, u(x) = \mu_x u(a) \Longrightarrow u^2(x) = \mu_x u^2(a) = \mu_x \lambda u(a) = \lambda u(x)$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\exists \lambda \in E, u^2 = \lambda u}$$

Exercice C.3 : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $f + g = \mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n$ où $n = \dim(E)$. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Montrons tout d'abord que f est un projecteur.

On sait que :

$$f + g = \mathrm{Id}_E \Longrightarrow g = \mathrm{Id}_E - f$$

On a donc :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{Id}_E - f) \leq n$$

On sait d'après la formule de Grassmann que :

$$\dim((\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)) - \dim((\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f))$$

Or on a :

$$\forall x \in E, x = f(x) + (x - f(x)) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{(\mathrm{Id}_E - f)(x)}_{\in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)}$$

On en déduit donc que :

$$\dim((\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)) = n$$

De plus on sait que :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)) \leq n \text{ et } \dim((\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \dim((\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)) = 0 \\ \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)) = n \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f) = \{0_E\}$$

De plus on a donc :

$$\forall x \in E, f^2(x) - f(x) = f(f(x) - x) = (\mathrm{Id}_E - f)(-f(x)) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - f)$$

On a donc :

$$\forall x \in E, f^2(x) = f(x)$$

Donc f est un projecteur.

De même $g = \mathrm{Id}_E - f$ est un projecteur car $g^2 = (\mathrm{Id}_E - f)^2 = \mathrm{Id}_E - Ef + f^2 = \mathrm{Id}_E - f = g$

Exercice F.4 : Soit E un espace vectoriel de dimensin finie n.
a) Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$ si et seulement si n est pair.
b) Montrer qu'alors pour un tel u, il existe une base de E de la forme :

$$\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), \dots, u(e_p)\right)$$

a) Il suffit juste d'appliquer le thérorème du rang :

$$\begin{aligned} &\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = n \\ &\Longrightarrow 2\mathrm{rg}(f) = n \\ &\Longrightarrow n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

b) On pose :
$\dim(\ker(f)) = p = \frac{n}{2}$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de $\ker(u)$.
On a alors :

$$\begin{aligned} &\forall i \in [\![1; p]\!], f_i \in \mathrm{Im}(u) \text{ car } \mathrm{Im}(u) = \ker(u) \\ &\Longrightarrow \forall i \in [\![1; p]\!], \exists e_i \in E, u(e_i) = f_i \end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), \dots, u(e_p)\right)$ forme une base de E.
On sait que :

$$\#B = 2p = n = \dim(E)$$

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.
On résout :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{p} \mu_i u(e_i) = 0_E \\ &\Longrightarrow u\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{p} \mu_i u(e_i)\right) = u(0_E) = 0_E \\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_i u(e_i) + \sum_{k=1}^{p} \mu_i u^2(e_i) = 0_E \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], u(e_i) \in \mathrm{Im}(u) = \ker(u) \Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], u^2(e_i) = 0$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i u(e_i) = 0_E$$

Comme $\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, c'est une famille libre donc :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{p} \mu_i u(e_i) = 0_E \Longrightarrow \sum_{k=1}^{p} \mu_i u(e_i) = 0_E$$

Comme $\left(u(e_1), \dots, u(e_p)\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, c'est une famille libre donc :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \mu_i = 0$$

On a donc :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{k=1}^{p} \mu_i u(e_i) = 0_E \Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = \mu_i = 0$$

Donc $\mathcal{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), \dots, u(e_p)\right)$ est une base de E.