Chapitre 24 - Dénombrement

Dans tout ce cours, n désigne un entier naturel non nul et $E = \{x_1; \dots; x_n\}$ un ensemble à n éléments deux à deux disjoints.

I) Cardinal d'un ensemble fini

a) Nombre d'éléments

Définition : Soit E un ensemble fini. On appelle cardinal de E le nombre d'éléments de E.

- Si E est vide son cardinal est 0.
- Si $E = \{x_1; \dots; x_n\}$ avec $x_i \neq x_j$ dès que $i \neq j$, son cardinal est n.

On dit que le cardinal de E est n si et seulement si E est en bijection avec $\{1; \dots; n\}$.
On note indifféremment :

$$|E| = \mathrm{Card}(E) = \#E$$

Exemple I.a.1 : Déterminer $\mathrm{Card}(\llbracket 6; 121 \rrbracket)$.

b) Relation d'ordre sur les cardinaux

Propriété I.b.1 : Soit $F \in \mathcal{P}(E)$. On a alors :
1) $\mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card}(E)$
2) $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E) \Leftrightarrow E = F$

Propriété I.b.2 : Soient E et F deux ensembles finis et $h: E \to F$.
1) Si h est bijective, $\mathrm{Card}(E) = n$ si et seulement si $\mathrm{Card}(F) = n$
2) Si h est injective, $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$
3) Si h est surjective, $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$

Application I.b.3 (principe des tiroirs) : Soit $h: E \to F$ avec E et F deux ensembles finis. Si $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(F)$ alors l'application n'est pas injective et donc nécessairement il existe deux antécédents distincts de E qui ont même image par h :
Si on range p paires de chaussettes dans n tiroirs avec n<p, il existe au moins deux paires qui sont dans le même tiroir.

Exemple I.b.4 : Parmi 13 personnes, il y en toujours deux qui sont nés le même mois.

Application I.b.5 : Soit E un ensemble de 10 entiers différents compris entre 1 et 100. Démontrer qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Propriété I.b.6 : Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal n. On pose $h: E \to F$. On a alors :

$$h \text{ est injective} \Leftrightarrow h \text{ est surjective} \Leftrightarrow h \text{ est bijective}$$

c) Opérations sur les cardinaux

Propriété I.c.1 : Soit E et F deux ensembles finis. On a alors :

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

En particulier :

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) \Leftrightarrow E \text{ et } F \text{ sont disjoints}$$

Application I.c.2 : Soit E un ensemble fini à n éléments. On a alors :

$$Card\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$$

Propriété I.c.3 : Soit E et F deux ensembles finis. On a alors :

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

Remarque : Si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles finis, on a :

$$Card\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} Card(E_i)$$

II) Dénombrement des ensembles d'applications

a) Listes et uplets

Définition : Soit E un ensemble. On appelle p-liste de E un p-uplet de E, c'est-à-dire un élément de $E^p = \underbrace{E \times \dots \times E}_{\text{p fois}}$.

Exemple II.a.1 : $(2; 5; 5; 3)$ est un 4-uplet de $[\![0; 10]\!]^4$

Propriété II.a.2 : Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p. C'est-à-dire que :

$$\mathrm{Card}(E^p) = n^p$$

Exemple II.a.3 : Combien peut-on écrire de « mots » de 3 lettres différents avec 26 lettres ?

Application II.a.4 : Soit E un ensemble fini à n éléments. On a alors :

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$$

Propriété II.a.5 : Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est égal à

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Application II.a.6 : Sur un 100m d'athlétisme, avec 8 coureurs, combien y-a-t-il de podium différents ?

Remarque : On appelle cela un arrangement de p éléments parmi n et on note :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Application II.a.7 **:** Le nombre d'application d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est n^p.

Application II.a.8 (Autre démo) : Soit E un ensemble fini à n éléments. On a alors :

$$\mathrm{Card}\big(\mathcal{P}(E)\big) = 2^n$$

Propriété II.a.9 (cardinal des permutations) : Soit E un ensemble fini de cardinal n. On note S(E) l'ensemble des permutations de E dans E (appelé également permutation dans le cas où E est fini). On a alors :

$$\mathrm{Card}\big(S(E)\big) = n!$$

Exemple II.a.10 : Déterminer le nombre de bijection de $[\![1; 4]\!]$ dans lui-même.

b) Les coefficients binomiaux

Propriété II.b.1 : Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier. Alors le nombre de partie de E de cardinal p est :

$$\mathrm{Card}(\{X \in E; \mathrm{Card}(X) = p\}) = \binom{n}{p}$$

Application II.b.2 : Dans une classe de 18 élèves, combien peut-on faire de groupe de 15 différents ?

Application II.b.3 : Le loto comporte 49 boules. Combien a-t-on de chance de gagner le gros lot ?

Application II.b.4 : Dans une classe de 18 élèves, on souhaite constituer des groupes de colles de 3 personnes. Combien de répartitions possibles peut-on avoir ?

Propriété II.b.5 (L'identité de Fermat ou formule du triangle) :

$$\forall\,(n;p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$$

***Application II.b.6 (Triangle de Pascal)* :**

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$\cdots$
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$
n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Proposition II.b.7 : On a :

$$\forall\,(x;y) \in \mathbb{C}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Application II.b.8 : Soit E un ensemble fini à n éléments. On a alors :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$$

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) = n2^{n-1}$$