

Fiche TD 24 - Dénombrement

Partie A : Calcul de cardinaux

Exercice A.1 : Soit n un entier naturel $n \geq 2$. On se donne $M_1; \dots; M_n$ points distincts du plan. Combien peut-on construire de segments distincts avec ces n points ?

Exercice A.2 : Déterminer le nombre de diviseur de 1800.

Exercice A.3 : Combien y-a-t-il de façon de ranger n objets dans p tiroirs sachant qu'un tiroir peut contenir autant d'objet que l'on veut ?

Exercice A.4 : Combien de nombres de trois chiffres peut-on former à l'aide des chiffres 2,3,4,5,6,7,9 ?

Exercice A.5 : Dans une classe de 34 étudiants, 26 aiment les Maths, 20 sont sportifs et 7 sont musiciens. Aucun étudiant ne déteste le sport, les Maths et la musique. De plus 4 sont des maths musiciens, 15 des matheux sportifs et 3 des musiciens sportifs.

Y-a-t-il un étudiant satisfaisant les idéaux grecs : Maths, musique et sport ?

Partie B : Les arrangements et combinaison

Exercice B.1 : Combien y-a-t-il d'anagramme du mot MATH ? Du mot dénombrement ?

Exercice B.2 : On suppose qu'une personne ne peut pas avoir plus de 2 000 000 de cheveux. Montrer qu'il y a au moins 30 personnes en France qui ont le même nombre de cheveux.

Exercice B.3 : Soit E un ensemble de 10 entiers différents compris entre 1 et 100. Démontrer qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Exercice B.4 : Soit E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples (X, Y) avec : $X \subset Y \subset E$?

Exercice B.5 : Montrer de deux manières différentes que :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \text{ tel que } r \leq p + q, \sum_{i=0}^r \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice B.6 : On trace dans le plan n droites de sorte que 2 d'entre elles ne soient jamais parallèles, ni trois d'entre elles concourantes.

a) En combien de région partagent-elles le plan ?

b) Combien y-a-t-il de triangles ?

Exercice B.7 : Soit E un ensemble fini. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}$$

Exercice B.8 : Calculer :

$$\sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) \quad \text{et} \quad \sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cup Y)$$

Exercice B.9 : Soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E qui contient p éléments.

- 1) Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant exactement un élément de A ?
- 2) Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant au moins un élément de A ?

Exercice B.10 : On considère un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs. Chacune de ces couleurs est constituée de 13 hauteurs : du 2 au 10, valet, dame, roi et as. Dans un jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes. Ces 5 cartes sont appelées une « main ».

- 1) Déterminer le nombre de mains.
- 2) Déterminer le nombre de mains qui contiennent un carré.
- 3) Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un trèfle.
- 4) Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan d'as.
- 5) Déterminer le nombre de « full ».
- 6) Déterminer le nombre de mains qui contiennent une double paire.
- 7) Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi et un cœur.
- 8) Déterminer le nombre de « quintes » (5 cartes qui se suivent sans être de la même couleur).
- 9) Déterminer le nombre de couleurs (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas).

Exercice B.11 : On dispose de 12 mouchoirs identiques, qui ne diffèrent que par leur couleur : 5 sont bleus, 4 sont verts et 3 sont rouges. On forme une pile constituée de tous ces mouchoirs.

- 1) Combien peut-on former de piles différentes ?
- 2) Dans combien de ces dispositions retrouve-t-on les mouchoirs rouges au-dessus de la pile ?

Exercice B.12 : Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

- 1) On tire simultanément cinq boules de l'urne.
 - a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
- 2) On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
 - a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?