Programme de colle n°24
Du 27 au 30 avril

Séries numériques

- Définition de $\sum u_n$ converge avec la convergence de la suite des sommes partielles
- Somme géométrique, exponentielle.
- Somme télescopiques

Séries numériques à termes positifs

- Convergence avec majoration des sommes partielles.
- Convergence ou divergence par comparaison (relation d'ordre, notation de Landau, équivalent)
- Comparaison série-imtégrale
- Critère de Riemann
- Critère de d'Alembert

Séries absolument convergence ou non

- Définition d'une série absolument convergente.
- Toute série absolument convergente converge.
- Critère spécial des séries alternées.
- Développement décimal d'un nombre réel

Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire
- Image et rang d'une application linéaire
- Isomorphismes (égalité des dimensions, espaces isomorphes), injectivité et surjection avec l'image et le noyau.
- Homothéties, projecteurs et symétries

Démo de cours

Propriété :

$$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge et } \sum \frac{1}{n} \sim \ln(n)$$

Propriété : On a :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1$$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

- f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$
- f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On pose $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$. On a alors :
(1) f est injective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre dans F
(2) f est surjective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice dans F
(3) f est bijective $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F

Propriété : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$p \text{ est un projecteur } \Leftrightarrow p o p = p$$

On a plus précisément $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Propriété IV.b.2 : Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a alors :

$$s \text{ est une symétrie } \Leftrightarrow s o s = \mathrm{Id}_E$$

On a plus précisément $E = \ker(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(s + \mathrm{Id}_E)$ et p est la symétrie par rapport à $\ker(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\ker(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercices de cours

Exercice B.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = Im(f) + Ker(f) \Leftrightarrow Im(f) = Im(f^2)$$

Exercice B.7 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x+2y, 4x-y, -2x+2y+3z) \end{cases}$$

Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice D.2 : On pose $F = \mathrm{vect}\big((1,0,0)\big), G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z=0\}$.

a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\forall u \in F, f(u) = -2u, \forall v \in G, f(v) = v$$

b) Expliciter cet endomorphisme.

Exercice E.1 : On pose :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ;\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, F = \mathrm{vect}(e_1, e_2) \text{ et } G = \mathrm{vect}(e_3)$$

a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

c) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèment à F.

Exercice E.5 : On pose :

$$f:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x-y-2z \\ -2x+3y-4z \\ -x-y+3z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur et en déduire ces éléments caractéristiques.