

**Programme de colle n°25**  
**Du 4 au 7 mai**

**Applications linéaires**

- Définition d'une application linéaire
- Image et rang d'une application linéaire
- Isomorphismes (égalité des dimensions, espaces isomorphes), injectivité et surjection avec l'image et le noyau.
- Homothéties, projecteurs et symétries
- Théorème du rang

Remarque : Nous n'avons fait que deux heures de cours au lieu de 7 cette semaine, cela explique ce programme de colle succinct.

**Démo de cours**

**Propriété :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a alors :

- $f$  est surjective  $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = F$
- $f$  est injective  $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{O_E\}$

**Propriété :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On pose  $\mathcal{F} = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ . On a alors :

- (1)  $f$  est injective  $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre dans  $F$
- (2)  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice dans  $F$
- (3)  $f$  est bijective  $\Leftrightarrow (f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$

**Propriété :** Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$ . On a alors :

$$p \text{ est un projecteur } \Leftrightarrow p \circ p = p$$

On a plus précisément  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$  et  $p$  est le projecteur sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ .

**Propriété IV.b.2 :** Soit  $s \in \mathcal{L}(E)$ . On a alors :

$$s \text{ est une symétrie } \Leftrightarrow s \circ s = \text{Id}_E$$

On a plus précisément  $E = \text{ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{ker}(s + \text{Id}_E)$  et  $p$  est la symétrie par rapport à  $\text{ker}(s - \text{Id}_E)$  dans la direction de  $\text{ker}(s + \text{Id}_E)$ .

**Propriété I.c.1 (Théorème du rang) :** Soit  $E$  de dimension finie,  $F$  quelconque et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors tout supplémentaire de  $\text{ker}(f)$  dans  $E$  est isomorphe à  $\text{Im}(f)$  :

$$E = \text{ker}(f) \oplus S \Rightarrow S \simeq \text{Im}(f)$$

**Propriété I.c.2 (Théorème du rang 2) :** Soit  $E$  de dimension finie,  $F$  quelconque et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a alors :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$$

**Exercices de cours**

**Exercice B.4 :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que :

$$E = \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

**Exercice B.7 :** On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, 4x - y, -2x + 2y + 3z) \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice D.2 :** On pose  $F = \text{vect}((1,0,0))$ ,  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ .

a) Montrer qu'il existe une unique application linéaire  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que :

$$\forall u \in F, f(u) = -2u, \forall v \in G, f(v) = v$$

b) Expliciter cet endomorphisme.

**Exercice E.1** : On pose :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, F = \text{vect}(e_1, e_2) \text{ et } G = \text{vect}(e_3)$$

a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .

b) Déterminer l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

c) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à G parallèlement à F.

**Exercice E.5** : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4x - y - 2z \\ -2x + 3y - 4z \\ -x - y + 3z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur et en déduire ces éléments caractéristiques.

**Exercice F.1** : Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

$$a) f: \begin{cases} \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y + z + t \\ x + 2z - t \\ x + y + 3z - t \end{pmatrix} \end{cases} \quad b) g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 2y - 2z \\ x - 3y + 11z \\ -3x + 4y - 18z \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Exercice F.3** : Soit  $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$  tels que  $f + g = \text{Id}_E$  et  $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq n$  où  $n = \dim(E)$ . Montrer que f et g sont des projecteurs.

**Exercice F.4** : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

a) Montrer qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\text{Im}(u) = \text{ker}(u)$  si et seulement si n est pair.

b) Montrer qu'alors pour un tel u, il existe une base de E de la forme :

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p, u(e_1), \dots, u(e_p))$$