Chapitre 25 : Matrice d'une application linéaire
Partie A : Généralité

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I) Sur les vecteurs

a) Matrice d'un vecteur

Définition : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. On appelle matrice de x dans la base B, notée $\mathrm{mat}_B(x)$, la matrice colonne composée des coordonnées de x dans la base B :

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \Rightarrow \mathrm{mat}_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple I.a.1 : Soit $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose :

$$e = 2e_1 + e_2 + 3e_3$$

a) Déterminer $\mathrm{mat}_{B_c}(e)$

b) On pose :

$$B = (e'_1, e'_2, e'_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Démontrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer $\mathrm{mat}_B(e)$

Exemple I.a.2 : On pose $P(X) = 1 + X + X^2$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$.

a) Déterminer $\mathrm{mat}_{B_c}(P)$

b) On pose $B = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$

Démontrer que B est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer $\mathrm{mat}_B(P)$.

Propriété I.a.3 : Soit B une base de E. On pose :

$$\Phi_B : \begin{cases} E \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ e \mapsto \mathrm{mat}_B(e) \end{cases}$$

Alors Φ_B est un isomorphisme de $\mathcal{L}\left(E, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\right)$.

b) Matrice d'une famille de vecteurs

Définition : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = \left(u_1, \dots, u_p\right) \in E^p$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de $\mathcal{F}$ dans la base B, notée $\mathrm{mat}_B(\mathcal{F})$, la matrice :

$$\mathrm{mat}_B(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p,1} & \cdots & m_{p,n} \end{pmatrix} \text{ où } u_i = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i} e_j, \forall i \in [\![1, p]\!]$$

Exemple I.b.1 : Soient $x_1 = (2,3,5), x_2 = (0, -1, 3)$. Déterminer $\mathrm{mat}_{B_c}(x_1, x_2)$.

Exemple I.b.2 : On pose :

$$\forall i \in [\![0,3]\!], P_i(X) = (X + 1)^i$$

Déterminer :

$$A = \mathrm{mat}_{B_c}(P_0, P_1, P_2, P_3)$$

Avec $\mathcal{B}_c$ qui désigne la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

II) Matrice d'une application linéaire

a) L'image de la base

Définition : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finie n et p. Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $B' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle matrice de u dans les bases B et B', notée $mat_{B,B'}(u)$, la matrice :

$$mat_{B,B'}(u) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p,1} & \dots & m_{p,n} \end{pmatrix} = mat_{B'}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ où } u(e_i) = \sum_{j=1}^{p} m_{j,i} f_j, \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Remarque :

- Le nombre de lignes de $mat_{B,B'}(u)$ est égale à la dimension de F.
- Le nombre de colonnes de $mat_{B,B'}(u)$ est égale à la dimension de E.

Exemple II.a.1 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (2x + y, x - 2y, 5y) \end{cases}$$

Déterminer $mat_{B,B'}(u)$, où B et B' sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exemple II.a.2 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, x + 2y) \end{cases}$$

B_1, B_2 les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, $B_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $B_4 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Ecrire $mat_{B_i,B_j}(u), \forall (i, j) \in \{1,3\} \times \{2,4\}$.

Exemple II.a.3 : On pose : $u: \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire telle que :

$$mat_{(1,X,X^2,X^3),(1,1+X,1+X+X^2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'application u.

b) Cas d'un endomorphisme

Exemple II.b.1 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 3y+z, x + 3z) \end{cases}$$

Déterminer $mat_{B_c}(u)$ puis $mat_{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}(u)$.

Exemple II.b.2 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P + P' \end{cases}$$

Déterminer $mat_{B_c}(f)$.

Application II.b.3 : Soit

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x - 2y + 2z, -2x-y+2z, -2x - 2y + 3z) \end{cases}$$

Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Propriété II.b.4 : Pour toute base B de E on a :

$$\mathrm{mat}_B(\mathrm{id}_E) = I_n$$

III) Opérations sur les applications linéaires ou sur les matrices d'applications linéaires

a) Matrice de l'image d'un vecteur

Propriété III.a.1 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ayant pour bases respectives B et B'. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F), x \in E$. On a alors :

$$y = u(x) \Rightarrow \mathrm{mat}_{B'}(y) = \mathrm{mat}_{B,B'}(u) \times \mathrm{mat}_B(x)$$

Application III.a.2 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, x + 2y) \end{cases}$$

Calculer $u(1,1)$ de deux façons différentes.

Application III.a.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P + P' \end{cases}$$

Calculer $f(1 + X + \cdots + X^n)$ de deux façons différentes.

b) Compatibilité des opérations

Propriété III.b.1 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ayant pour bases respectives B et B'. On a alors :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, mat_{B,B'}(\lambda u + \mu v) = \lambda mat_{B,B'}(u) + \mu mat_{B,B'}(v)$$

Propriété III.b.2 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie (respectivement n et r) ayant pour bases respectives B et B'. Alors l'application suivante est un isomorphisme :

$$\phi_{B,B'}: \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \to M_{r,n}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto mat_{B,B'}(f) \end{cases}$$

Propriété III.b.3 : Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie ayant pour bases respectives B, B'et B''. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a alors :

$$mat_{B,B''}(vou) = mat_{B',B''}(v) \times mat_{B,B'}(u)$$

Application III.b.4 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (3x + 6y, -x-2y) \end{cases}$$

Ecrire la matrice de u dans la base canonique et en déduire que u est un projecteur.

Application III.b.5 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (-x - 2y + 2z, -2x-y+2z, -2x - 2y + 3z) \end{cases}$$

Montrer que u est une symétrie.