Chapitre 25 : Matrice d'une application linéaire
Partie B : Isomorphismes et matrice de changement de base

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I) Les matrices d'isomorphismes

a) Matrice inversible et isomorphisme

Propriété I.a.1 : Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension finie ayant pour bases respectives B et B'. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{mat}_{B,B'}(u)$ est inversible

$$\mathrm{mat}_{B',B}(u^{-1}) = \left(\mathrm{mat}_{B,B'}(u)\right)^{-1}$$

Application I.a.2 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\mathrm{mat}_{B_c}(\varphi) = M$

b) Déterminer M^{-1}.

b) Base d'un espace vectoriel

Propriété I.b.1 : Soient B une base de E et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de E. On a alors :

$(u_1, \dots, u_n)$ base de E si et seulement si $\mathrm{mat}_B\big((u_1, \dots, u_n)\big)$ est inversible

Application I.b.2 : On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que M est inversible.

II) Matrice de changement de base

a) D'une base à l'autre

Définition : Soient B et B' deux bases de E. On appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice :

$$P_{B,B'} = \mathrm{mat}_{B',B}(\mathrm{Id}_E)$$

Exemple II.a.1 : On pose :

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ecrire $P_{B_c,B}$ puis P_{B,B_c}

Exemple II.a.2 : On pose B la base de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$B = (1, 1 + X, 1 + X + X^2)$$

Déterminer $P_{B_c,B}$ puis P_{B,B_c}.

Propriété II.a.3 : Soient B et B' deux bases de E. On a alors :
(1)$P_{B,B'} = \mathrm{mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$
(2)$P_{B,B} = I_n$
(3) $P_{B,B'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(P_{B,B'}\right)^{-1} = P_{B',B}$

Application II.a.4 : On pose :

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Déterminer P_{B,B_c}.

b) Lien avec les coordonnées d'un vecteur

Propriété II.b.1 : Soient B et B' deux bases de E et $x \in E$. On a alors :

$$\mathrm{mat}_B(x) = P_{B,B'} \times \mathrm{mat}_{B'}(x)$$

Remarque : On note souvent l'égalité précédente par :

$$X = PX'$$

Application II.b.2 : On pose :

$$X = \mathrm{mat}_{B_c}(x) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ et } B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Déterminer $X' = \mathrm{mat}_B(x)$.

c) Lien avec les isomorphismes

Propriété II.c.1 : Soient B et B' deux bases de E et C, C' deux bases de F, $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors :

$$\mathrm{mat}_{B',C'}(u) = P_{C',C} \times \mathrm{mat}_{B,C(u)} \times P_{B,B'}$$

On peut se repérer grâce au schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
E_{\mathcal{B}} \arrow[r, "u"] & F_{\mathcal{C}} \\
E_{\mathcal{B}'} \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, "u"] & F_{\mathcal{C}'} \arrow[u, "id_E"']
\end{tikzcd}$$

Définition : Soient deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, deux matrices $(P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que :

$$A = PBQ$$

On dit alors que A et B sont <u>équivalentes</u>.

Application II.c.2 : On pose :

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right), F = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } G = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$$

a) Déterminer l'expression de la symétrie par rapport à F dans la direction de G, noté s.
b) Déterminer l'expression du projecteur sur F parallèlement à G, noté p.