

Chapitre 25 : Matrice d'une application linéaire
Partie C : Noyau et image d'une matrice

I) D'une matrice vers une application linéaire

a) Application linéaire canoniquement associé

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associé à la matrice A l'application :

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

Remarque : On pose B et B' les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p . On a alors :

$$\text{mat}_{B,B'}(\varphi_A) = A$$

Exemple I.a.1 : Déterminer l'application linéaire canoniquement associée aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Noyau et image d'une matrice

Définition : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et φ_A l'application canoniquement associée à A. On appelle :

- Le noyau de A, noté $\text{Ker}(A)$, le noyau de φ_A : $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\varphi_A)$
- L'image de A, noté $\text{Im}(A)$ l'image de φ_A : $\text{Im}(A) = \text{Im}(\varphi_A)$
- Le rang de A, noté $\text{rg}(A)$, le rang de φ_A : $\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi_A)$

Propriété I.b.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est égal au rang de la famille (C_1, C_2, \dots, C_n) des colonnes de A. Ainsi :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Application I.b.2 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

c) Théorème du rang

Propriété I.c.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors :

- $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$
- Théorème du rang : $p = \dim(\text{ker}(A)) + \text{rg}(A)$

Application I.c.2 : Déterminer le rang de la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

II) Calcul du noyau et du rang

a) Matrices inversibles et isomorphismes

Propriété II.a.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{ker}(A) = \{0_n\} \Leftrightarrow \text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

Application II.a.2 : Démontrer que la matrice suivante est inversible :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcul du rang

Propriété II.b.1 : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$.

$$(1) \text{rg}(QA) = \text{rg}(A) = \text{rg}(AP)$$

$$(2) \begin{cases} A \underset{L}{\sim} B \\ \text{ou} \\ A \underset{C}{\sim} B \end{cases} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$$

Remarque : Le rang d'une matrice est invariant lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice.

Application II.b.2 : Déterminer le rang de la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété II.b.3 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le nombre de pivots non nuls dans l'unique matrice R échelonnée réduite par ligne telle que $A \underset{L}{\sim} R$.

Remarque : Le rang d'une matrice A est donc le rang du système linéaire homogène associé.

Propriété II.b.4 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose :

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

On a l'équivalence suivante :

$$\text{rg}(A) = r \Leftrightarrow A \sim J_r$$

Exemple II.b.5 : Déterminer le rang de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Avec la transposée

Propriété II.c.1 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)$$

Application II.c.2 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

Application II.c.3 : on pose :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts}$$