Fiche TD 25
Matrices d'une application linéaire

Partie A : Définition

Exercice A.1 : Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$\text{a) } u_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P(1) \end{cases}, \text{b)} u_2 : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)dt \end{cases}, \text{c)} u_3 : \begin{cases} \mathbb{C}_3[X] \to \mathbb{C}_3[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}, \text{d)} u_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P + P' \end{cases}$$

Exercice A.2 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On pose :

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$$

a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{K})\big)$

b) Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice A.3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de f.

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$et $\mathrm{Im}(f)$.

3) Démontrer qu'ils sont en sous directe.

4) Déterminer une base B de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base B' de $\mathrm{Im}(f)$ puis écrire $\mathrm{mat}_{B\cup B'}(f)$.

5) Ecrire f comme la composée de deux endomorphismes connus.

Exercice A.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de f.

2) Calculer f^2. En déduire que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$ puis en déduire une base du noyau et de l'image de f.

4) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice A.5 : Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{\imath}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

a) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Même question avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Même question avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$

Exercice A.6 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

En utilisant l'application linéaire canoniquement associée à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Partie B : Matrices de changement de bases

Exercice B.1 : On pose $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

b) On pose : $x = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice B.2 : On considère la base canonique de $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$
a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$.
c) On pose :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$$

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_c$ puis dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice B.3 : Déterminer la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan $x + y - z = 0$ parallèlement à la droite $\mathrm{vect}\big((1,1,1)\big)$.

Exercice B.4 : On note $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire suivante :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}3x+4y\\-x+y\\2x-2y\end{pmatrix} \end{cases}$$

1) On pose $e'_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$.
a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
b) Ecrire les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
2) Soit $f'_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $f'_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $f'_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2, f'_3)$
a) Montrer que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Ecrire les matrices de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ puis de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$.
3) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u)$, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(u)$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$.

Exercice B.5 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{cases}$$

a) Déterminer $A = \mathrm{mat}_{B_c}(u)$.
b) Montrer que $B = \left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer :

$$C = \mathrm{mat}_B(u)$$

c) Calculer A^n.

Exercice B.6 : On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique.

a) Montrer que $\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, $\ker(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, $\ker(u + 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont de dimension 1 et en donner des bases.

b) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_{-4})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_i = \ker(u - i.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$

c) Donner la matrice D de u dans cette base. En déduire le calcul de A^n pour tout entier naturel n.

Exercice B.7 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice dans la base canonique de u.

b) Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.

d) Déterminer de deux façons différentes u^n.

Partie C : Rang d'une matrice

Exercice C.1 : Déterminer le rang des matrices suivantes et si elle existe déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D_c = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

Exercice C.2 : 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de rang 1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'une colonne non nulle.

2) Soit f un endomorphisme tel que :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le rang de f. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

b) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.

Exercice C.3 : 1) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice ligne non nulle $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$.

2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $u^2 = \mathrm{Tr}(u)u$.

b) Que peut-on dire lorsque sa trace vaut 1 ?

c) Montrer que $\mathcal{L}(E)$ possède une base formée de projecteurs.