

Correction Fiche TD 24 - Dénombrement

Partie A : Calcul de cardinaux

Exercice A.1 : Soit n un entier. On se donne $M_1; \dots; M_n$ points distincts du plan. Combien peut-on construire de segments distincts avec ces n points ?

Dans ce genre d'exercice il faut faire un dessin. Si $n = 2$ on a 1 seul segment. Si $n = 3$ on a 3 segments. Si $n = 4$ on a 6 segments. On pose A_n le nombre de segments possibles avec n points.

Ainsi on a :

$$A_2 = 1, A_3 = 2 + 1 = 3, A_4 = 3 + 2 + 1 = 6$$

On peut alors émettre l'hypothèse que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A_n = n - 1 + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

On peut alors démontrer ce résultat par récurrence.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, P_n$: " $A_n = \frac{n(n-1)}{2}$ "

Initialisation : Pour $n = 2$ on a juste le segment $[M_1M_2]$ donc $A_2 = 1 = \frac{2}{2} \times 1$

Donc P_2 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2. On suppose vraie P_n :

$$A_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

On prend $\{M_1; \dots; M_{n+1}\}$ points du plan.

On a alors :

$[M_{n+1}M_1], \dots, [M_{n+1}M_n]$ n segments avec M_{n+1} . Il reste ensuite tous les autres segments avec $\{M_1; \dots; M_n\}$ soit A_n .

On a donc :

$$A_{n+1} = n + A_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_2 est vraie et P_n héréditaire donc d'après le principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P_n$ est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Exercice A.2 : Déterminer le nombre de diviseur de 1800.

Il suffit de diviser 1800 en produit de nombres premiers.

On a : $1800 = 100 \times 18 = 2^3 \times 5^2 \times 3^2$

On a donc :

$$\#D_{1800}^+ = 4 \times 3 \times 3 = 36$$

On peut le vérifier sur Python.

```
def nbdiviseur(n):
    a=[]
    for i in range(1,int(n/2)+1):
        if n%i==0:
            a.append(i)
    return len(a)+1

*** Python 3.4.5 |Continuum Analytics, Inc. |
.1600 32 bit (Intel) on win32. ***
>>> nbdiviseur(1800)
36
```

Exercice A.3 : Combien y-a-t-il de façon de ranger n objets dans p tiroirs sachant qu'un tiroir peut contenir autant d'objet que l'on veut ?

Une façon très visuelle permet de se représenter ce qu'on fait : on dessine un "o" pour un objet (ils sont indiscernables donc tous représentés pareil), et un | pour un tiroir, dans l'ordre.

Par exemple si on écrit $ooo|o|oo||$, cela signifie qu'il y a 6 objets et 4 tiroirs, que le premier contient 3 objets (parce qu'il y a 3 "o" avant le premier trait), le deuxième en contient 1, le troisième 2 et le dernier aucun (donc les deux traits se suivent). Toute combinaison de ce type correspond à un rangement bien déterminé, inversement à tout rangement je peux associer un seul schéma de ce type.

Faire un schéma de ce type, avec n objets et p tiroirs, revient à dessiner d'abord les n objets côte à côte, puis à intercaler p traits entr eux, de façon à obtenir un rangement possible. Pas tout-à-fait n'importe comment quand même: le dernier symbole doit être un trait puisqu'il matérialise combien d'objets sont dans le dernier tiroir.

Cette seule contrainte signifie qu'on ne va placer au petit bonheur la chance que $p-1$ des p traits, mais vraiment n'importe où cette fois-ci, même à la fin si on veut puisque deux traits (ou plus même) peuvent très bien se suivre, comme dans mon exemple.

Finalement il y a $n+p-1$ symboles à écrire en tout (je ne compte pas le dernier trait qui de toute façon sera à écrire en bout de chaîne), ce qui revient à considérer des places numérotées de 1 à $n+p-1$ où peuvent se glisser les symboles |.

L'ordre des traits ne compte évidemment pas puisqu'il n'y a qu'une possibilité d'interprétation d'un schéma comme $000|00|0000||00|$

Le problème devient donc : choisir n éléments (les places numérotées) dans un ensemble à $n+p-1$ éléments, l'ordre ne comptant pas.

On a donc :

$$\binom{n+p-1}{n}$$

Exercice A.4 : Combien de nombres de trois chiffres peut-on former à l'aide des chiffres 2,3,4,5,6,7,9 ?

Il suffit de voir que l'on peut choisir parmi 7 chiffres. On a donc :

$$7^3 = 343 \text{ nombres différents.}$$

Exercice A.5 : Dans une classe de 34 étudiants, 26 aiment les Maths, 20 sont sportifs et 7 sont musiciens. Aucun étudiant ne déteste le sport, les Maths et la musique. De plus 4 sont des maths musiciens, 15 des matheux sportifs et 3 des musiciens sportifs.

Y-a-t-il un étudiant satisfaisant les idéaux grecs : Maths, musique et sport ?

On pose M_a , M_u et S les étudiants qui aiment les Maths ou la musique ou le sport.

On sait que :

$$\#M_a = 26, \#M_u = 7 \text{ et } \#S = 7$$

Or on sait que :

$$\#(M_a \cap M_u \cap S) = \#(M_a \cap M_u) + \#S - \#((M_a \cap M_u) \cup S)$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \#((M_a \cap M_u) \cup S) &\leq \#(M_a \cap M_u) + \#S \leq 4 + 20 \\ \Rightarrow \#(M_a \cap M_u \cap S) &= \#(M_a \cap M_u) + \#S - \#((M_a \cap M_u) \cup S) \geq 27 - 24 \geq 3 \end{aligned}$$

Donc oui il y a au moins 3 personnes qui satisfont à l'idéale grecque.

Partie B : Les arrangements et combinaison

Exercice B.1 : Combien y-a-t-il d'anagramme du mot MATH ? Du mot dénombrement ?

a) Il suffit de voir qu'il n'y a pas de lettre qui se répète dans le mot MATH. Donc on a 4 choix pour la première lettre, puis trois lettres, puis deux puis une. On en déduit donc que :

$$\#\{\text{Annagramme de MATH}\} = 4 \times 3 \times 2 = 4! = 24$$

b) Par contre ici c'est plus compliqué car dans le mot dénombrement, si on suppose que e et é est la même lettre (ce qui est souvent le cas), alors on doit compter le nombre de lettres qui se répète.

On a la lettre e qui se répète 3 fois, le n 2 fois, le m 2 fois. De plus on a 12 lettres dans le mot.

Si les 12 lettres étaient différentes, on aurait 12 ! annagrammes. Cependant il faut voir que si l'on échange deux lettres m, alors c'est le même mot que l'on aura compté deux fois.

On a :

$$\binom{12}{2} \text{ façons de placer les lettres m et n.}$$

On a de même

$$\binom{12}{3} \text{ façons de placer la lettre e.}$$

On place donc les lettres m, n et e puis le reste !

On a donc :

$$\#\{\text{Annagramme de denombrement}\} = \binom{12}{3} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times 5!$$

Exercice B.2 : On suppose qu'une personne ne peut pas avoir plus de 2 000 000 de cheveux. Montrer qu'il y a au moins 30 personnes en France qui ont le même nombre de cheveux.

Il suffit de dire qu'il y a plus de 65 000 000 de personnes en France. On utilise ensuite le lemme des tiroirs ou bien on raisonne par l'absurde.

On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1 ; 2 \times 10^6 \rrbracket$, $\#\{\text{personnes possédant } i \text{ cheveux}\} < 30$.

On a alors :

$$\sum_{i=0}^{2 \times 10^6} \#\{\text{personnes possédant } i \text{ cheveux}\} < 3 \times (2 \times 10^6 + 1) < 65 \times 10^6$$

Ce qui est absurde.

Donc il y a au moins 30 personnes en France qui ont le même nombre de cheveux.

Exercice B.3 : Soit E un ensemble de 10 entiers différents compris entre 1 et 100. Démontrer qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Soit $E \in \mathcal{P}(\llbracket 1 ; 100 \rrbracket)$, $|E| = 10$

On pose :

$$f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \llbracket 1 ; 1000 \rrbracket \\ A \mapsto \sum_{x \in A} x \end{cases}$$

On sait que :

$$\#\llbracket 1 ; 1000 \rrbracket = 1000$$

De plus :

$$\#\mathcal{P}(E) = 2^{10} = 1024$$

On sait donc qu'il y a 1023 éléments non vide de $\mathcal{P}(E)$.

Donc f ne peut être injective. Donc il existe $(A, A') \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\})^2$ tel que $f(A) = f(A')$ et $A \neq A'$.

On pose :

$$B = A \setminus \{A \cap A'\} \text{ et } B' = A' \setminus \{A \cap A'\}$$

On a alors :

$$(B, B') \in (\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\})^2, \begin{cases} f(B) = f(B') \\ B \cap B' = \emptyset \end{cases}$$

Exercice B.4 : Soit E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples (X,Y) avec : $X \subset Y \subset E$?

On pose :

$$A_X = \{Y \in \mathcal{P}(E), X \subset Y \subset E\} \text{ et } \#E = n \in \mathbb{N}$$

On a donc :

$$\text{Nb de couples } (X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2 = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \#A_X$$

Il suffit alors de raisonner sur le nombre d'éléments de X.

On sait que :

$$X \subset Y \Leftrightarrow Y = X \cup B_X$$

Avec

$$B_X \subset \mathcal{P}(E), B_X \cap X = \emptyset$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \#A_X &= \#\{Y \in \mathcal{P}(E), X \subset Y \subset E\} = \#\{Y \in \mathcal{P}(E), Y = X \cup B_X, B_X \subset \mathcal{P}(E), B_X \cap X = \emptyset\} \\ &= \sum_{\substack{B_X \in \mathcal{P}(E) \\ B_X \cap X = \emptyset}} \#B_X = \sum_{i=0}^{\#E - \#X} \#\{A \in \mathcal{P}(E \setminus X); \#A = i\} \\ &= 2^{n - \#X} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \#A_X = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 2^{n - \#X}$$

Or on a :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ \#X = i}} X$$

On a donc :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 2^{n - \#X} = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^{n-i} 1^i = (2+1)^n = 3^n$$

Exercice B.5 : a) Montrer que :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \text{ tel que } r \leq p + q, \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

a) On sait d'après l'identité de Fermat que :

$$\begin{aligned} \binom{p+q}{r} &= \binom{p+q-1}{r-1} + \binom{p+q-1}{r} \\ &= \binom{p+q-2}{r-2} + \binom{p+q-2}{r-1} + \binom{p+q-2}{r-1} + \binom{p+q-2}{r} \\ &= \binom{p+q-2}{r-2} + 2 \binom{p+q-2}{r-1} + \binom{p+q-2}{r} \\ &= \binom{p+q-3}{r-3} + \binom{p+q-3}{r-2} + 2 \binom{p+q-3}{r-2} + 2 \binom{p+q-3}{r-1} + \binom{p+q-3}{r-1} + \binom{p+q-3}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{p+q-3}{r-3} + 3 \binom{p+q-3}{r-2} + 3 \binom{p+q-3}{r-1} + \binom{p+q-3}{r} \\
&= \binom{p+q-4}{r-4} + \binom{p+q-4}{r-3} + 3 \binom{p+q-4}{r-3} + 3 \binom{p+q-4}{r-2} + 3 \binom{p+q-4}{r-2} + 3 \binom{p+q-4}{r-1} + \binom{p+q-4}{r-1} \\
&\quad + \binom{p+q-4}{r} \\
&= \binom{p+q-4}{r-4} + 4 \binom{p+q-4}{r-3} + 6 \binom{p+q-4}{r-2} + 4 \binom{p+q-4}{r-1} + \binom{p+q-4}{r}
\end{aligned}$$

On peut donc émettre l'hypothèse que :

$$\forall i \in \llbracket 0; p+q \rrbracket, \binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{p+q-i}{r-k}$$

Cette propriété est vraie pour $i = 0$.

A présent si $i \in \llbracket 0; p+q-1 \rrbracket$, fixé. On suppose vraie

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{p+q-i}{r-k}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\binom{p+q}{r} &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{p+q-i}{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \left[\binom{p+q-i-1}{r-k-1} + \binom{p+q-i-1}{r-k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{p+q-i-1}{r-k-1} + \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{p+q-i-1}{r-k} \\
&= \binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)} + \binom{p+q-(i+1)}{r} + \sum_{k=1}^i \binom{i}{k} \binom{p+q-(i+1)}{r-k} \\
&= \binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)} + \binom{p+q-(i+1)}{r} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k} \binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i}{k+1} \binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)} \\
&= \binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)} + \binom{p+q-(i+1)}{r} + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\binom{i}{k} + \binom{i}{k+1} \right) \binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)} \\
&= \binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)} + \binom{p+q-(i+1)}{r} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i+1}{k+1} \binom{p+q-(i+1)}{r-(k+1)} \\
&= \binom{i+1}{i+1} \binom{p+q-(i+1)}{r-(i+1)} + \binom{i+1}{0} \binom{p+q-(i+1)}{r-0} + \sum_{k=1}^i \binom{i+1}{k} \binom{p+q-(i+1)}{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} \binom{p+q-(i+1)}{r-k}
\end{aligned}$$

Donc la propriété reste vraie.

D'après le principe de récurrence on a démontré que :

$$\forall i \in \llbracket 0; p+q \rrbracket, \binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{p+q-i}{r-k}$$

Il suffit alors de prendre :

$k = i$ et $i = p$ et on a :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \text{ tel que } r \leq p+q, \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

b) Il suffit de reprendre l'égalité précédente avec $p = q = n$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice B.6 : On trace dans le plan n droites de sorte que 2 d'entre elles ne soient jamais parallèles, ni trois d'entre elles concourantes.

En combien de région partagent-elles le plan ?

Il faut faire un raisonnement empirique.

Si l'on a 0 droite, on a 1 région.

Si on a une droite il y a 2 régions.

Pour $n = 2$ il y a 4 régions.

Pour $n = 3$ on a 7 régions.

Pour $n=4$ on a 11 régions.

On peut donc émettre l'hypothèse que si R_n est le nombre de régions, on a alors :

$$R_n = n + n - 1 + \dots + 1 + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$$

On démontre cela par récurrence.

Initialisation : Si $n = 0$,

$$R_0 = 1 = \frac{0 \times 1}{2} + 1$$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, fixé ; On suppose vraie la proposition.

Lorsque l'on ajoute une droite (en conservant le caractère général de la position, celle-ci coupe chacune des autres droites existantes en de points distincts puisqu'elles ne sont pas concourantes, on a donc $n + 1$ zones supplémentaires.

On a donc :

$$R_{n+1} = R_n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et est héréditaire donc d'après le principe de récurrence, la proposition est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice B.7 : Soit E un ensemble fini. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}$$

Il suffit de voir que :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ |X|=i}} X$$

On pose $\#E = n$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| &= \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{X \in \mathcal{P}(E) \\ |X|=i}} |X| = \sum_{i=0}^n i \#\{X \in \mathcal{P}(E) ; |X|=i\} = \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{i(n!)}{i! (n-i)!} \\ \Rightarrow \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| &= n \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)! (n-i)!} = n \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)! ((n-1)-(i-1))!} = n \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i! ((n-1)-i)!} \\ &\Rightarrow \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n2^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice B.8 : Calculer :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) \quad \text{et} \quad \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cup Y)$$

a) **Méthode 1** :

On pose $\#E = n$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $\#A = i$

On pose :

$$E_A = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \cap Y = A\}$$

On sait donc que X contient les i éléments de A , ainsi que Y . Il reste alors $n-i$ éléments dans E qui ne peuvent appartenir à X et Y en même temps. On a donc pour chaque $n-i$ restant trois choix :

- Soit il appartient à X mais pas à Y
- Soit il appartient à Y mais pas à X
- Soit il n'appartient ni à l'un ni à l'autre.

On a donc :

$$\#E_A = 3^{n-i}$$

On pose :

$$E_i = \{A \in \mathcal{P}(E), \#A = i\}$$

On sait que :

$$\#E_i = \binom{n}{i}$$

On a donc :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = \sum_{i=0}^n \sum_{\substack{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \\ \#(X \cap Y) = i}} \#(X \cap Y) = \sum_{i=0}^n 3^{n-i} \#E_i = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} 3^{n-i}$$

On calcule :

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} 3^{n-i} = \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} 3^{n-i} = \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i! (n-i)!} 3^{n-i} = n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 3^{n-1-i} = n 4^{n-1}$$

Méthode 2 :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} \#(X \cap Y)$$

On fixe $X \in \mathcal{P}(E)$. On cherche :

$$\sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} \#(X \cap Y)$$

On pose :

$$A_X = \{Y \in \mathcal{P}(E), X \cap Y = \emptyset\}$$

Si on pose $\#E = n$ on a alors :

$$\#A_X = \#\{Y \in \mathcal{P}(E), \#Y \leq n - \#X\} = 2^{n-\#X}$$

On a donc :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y \in \overline{A_X}} \#(X \cap Y)$$

On pose :

$$\overline{A_X} = B_X = \{Y \in \mathcal{P}(E), X \cap Y \neq \emptyset\}$$

On a donc :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y \in B_X} \#(X \cap Y)$$

Soit $i \in \llbracket 1; \#X \rrbracket$. On pose :

$$B_{X,i} = \{Y \in \mathcal{P}(E), \#(X \cap Y) = i\}$$

Or on sait que

$$\sum_{Y \in B_X} \#(X \cap Y) = \sum_{i=1}^{\#X} \sum_{Y \in B_{X,i}} i = \sum_{i=1}^{\#X} i \#B_{X,i}$$

Il reste à déterminer :

$$\#B_{X,i}$$

On pose $i \in \llbracket 1; \#X \rrbracket$. On sait que :

$$Y \in B_{X,i} \Leftrightarrow Y = Y_1 \cup Y_2 \text{ avec } Y_1 \subset X, \#Y_1 = i \text{ et } Y_2 \cap X = \emptyset$$

On a donc :

$$\#B_{X,i} = \binom{\#X}{i} \times 2^{n-\#X}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) &= \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{Y \in B_X} \#(X \cap Y) = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{i=1}^{\#X} i \#B_{X,i} \\ \Rightarrow \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) &= \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \sum_{i=1}^{\#X} i \binom{\#X}{i} \times 2^{n-\#X} = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 2^{n-\#X} \sum_{i=1}^{\#X} i \binom{\#X}{i} = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} 2^{n-\#X} \times \#X \times 2^{\#X-1} \\ &\Rightarrow \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = 2^{n-1} \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \#X = n(2^{n-1})^2 = n4^{n-1} \end{aligned}$$

b) Il suffit de voir que :

$$\#(X \cap Y) + \#(X \cup Y) = \#X + \#Y$$

On a donc :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} [\#(X \cap Y) + \#(X \cup Y)] = \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#X + \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#Y = 2 \times \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#X$$

Or on sait que :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#X = \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \#X = \sum_{Y \in \mathcal{P}(E)} n2^{n-1} = n2^{n-1} \times 2^n$$

On a donc :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} [\#(X \cap Y) + \#(X \cup Y)] = n4^n$$

Or on sait que :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = n4^{n-1}$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} [\#(X \cap Y) + \#(X \cup Y)] = n4^n - n4^{n-1} = 3n \times 4^{n-1} = 3 \times \sum_{(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2} \#(X \cap Y) = 3n4^{n-1}$$

Exercice B.9 : Soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E qui contient p éléments.

- 1) Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant exactement un élément de A ?
- 2) Quel est le nombre de parties à k éléments de E contenant au moins un élément de A ?

1) Fixons un élément de A. Dans $E \setminus A$, de cardinal $n - p$, On a $\binom{n-p}{k-1}$ sous-ensemble à k-1 éléments dans $E \setminus A$. Le nombre d'ensemble dans le complémentaire de A à k-1 élément est donc de :

$$\binom{n-p}{k-1}$$

On sait de plus qu'il y a p éléments dans A. On a donc $p \binom{n-p}{k-1}$ nombre de parties à k éléments de E contenant exactement un élément de A.

2) Il suffit d'utiliser le résultat précédent.

On a : $p \binom{n-p}{k-1}$ nombre de parties à k éléments de E contenant exactement 1 élément de A.

On a : $\binom{n-p}{k-2} \binom{p}{2}$ nombre de parties à k éléments de E contenant exactement 2 éléments de A .

On doit donc calculer :

$$\sum_{i=1}^k \binom{n-p}{k-i} \binom{p}{k}$$

Nous pouvons aussi compter tous les sous-ensembles de E à k éléments, soit $\binom{n}{k}$ et retrancher tous les sous-ensembles de $E \setminus A$ à k éléments, soit $\binom{n-p}{k}$. On obtient alors le résultat suivant :

$$\sum_{i=1}^k \binom{n-p}{k-i} \binom{p}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n-p}{k}$$

Remarque : On obtient alors la formule suivante :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n-p}{k-i} \binom{p}{k} = \binom{n}{k}$$

Exercice B.10 : On considère un jeu de 52 cartes réparties en 4 couleurs. Chacune de ces couleurs est constituée de 13 hauteurs : du 2 au 10, valet, dame, roi et as. Dans un jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes. Ces 5 cartes sont appelées une « main ».

- 1) Déterminer le nombre de mains.
- 2) Déterminer le nombre de mains qui contiennent un carré.
- 3) Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un trèfle.
- 4) Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan d'as.
- 5) Déterminer le nombre de « full ».
- 6) Déterminer le nombre de mains qui contiennent une double paire.
- 7) Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi et un cœur.
- 8) Déterminer le nombre de « quintes » (5 cartes qui se suivent sans être de la même couleur).
- 9) Déterminer le nombre de couleurs (5 cartes de la même couleur qui ne se suivent pas).

1) C'est tout simplement :

$$\binom{52}{5} = 2\,598\,960$$

2) On a 13 carrée et il reste 48 cartes.

On a donc :

$$13 \times 48 = 624$$

3) On peut déterminer le nombre de mains sans trèfle, soit $\binom{39}{5}$. On a donc :

$$\binom{52}{5} - \underbrace{\binom{39}{5}}_{\text{Nombre de mains sans trèfle}} = 2023203$$

Mains différentes contenant un trèfle !

4) On a :

$$\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{Nombre de brelan d'as}} \times \underbrace{\left(\binom{48}{2} - 12 \times \binom{4}{2} \right)}_{\text{Nombre de duo non pair}} = 4224$$

5) On a :

$$\underbrace{\binom{4}{3} \times 13}_{\text{Nombre de brelan}} \times \underbrace{\binom{4}{2} \times 12}_{\text{Nombre de paires}} = 3744$$

6) On a :

$$\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{Nombre de duo non pair}} \times \underbrace{\left(\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \right)}_{\text{Nombre de paires associé à chaque duo}} \times 44 = 123552$$

7) On a :

$$\left[\binom{3}{1} \times \binom{13}{1} \right] \times \binom{36}{3} + \underbrace{1}_{\text{Roi de coeur}} \times \binom{36}{4} = 337365$$

Roi non coeur
coeur
3 cartes non coeur et non roi
Roi de coeur
4 cartes non coeur et non roi

$$8) \text{ On a : } \underbrace{40}_{\text{Choix de la première carte}} \times \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{\text{Choix des autres cartes}} - \underbrace{40}_{\text{Nombre de quinte flush}} = 10200$$

$$9) \text{ On a : } \underbrace{4}_{\text{Choix de la couleur}} \times \underbrace{\binom{13}{5}}_{\text{Choix de 5 cartes dans cette couleur}} - \underbrace{40}_{\text{Nombre de quinte flush}} = 5108$$

Exercice B.11 : On dispose de 12 mouchoirs identiques, qui ne diffèrent que par leur couleur : 5 sont bleus, 4 sont verts et 3 sont rouges. On forme une pile constituée de tous ces mouchoirs.

- 1) Combien peut-on former de piles différentes ?
- 2) Dans combien de ces dispositions retrouve-t-on les mouchoirs rouges au-dessus de la pile ?

1) On place les bleus, puis les verts et les rouges :

$$\binom{12}{5} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{3} = 27720$$

2) On place les bleus, puis les verts dans l'espace qu'il reste :

$$\binom{9}{5} \times \binom{4}{4} = 126$$

Exercice B.12 : Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

- 1) On tire simultanément cinq boules de l'urne.
 - a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
- 2) On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
 - a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

1) Les boules étant numérotées, on sait que le tirage (1; 2; 3; 4; 7) n'est pas le même tirage que (7; 4; 2; 3; 1)

On a donc 15! tirages différents si on regarde les numéros.

Si on ne regarde que les numéros sans l'ordre, il suffit de diviser par 5! qui est le nombre de façons de tirer les mêmes numéros :

$$\frac{15!}{5!}$$

Si à présent on ne regarde que les couleurs, sans les numéros ni l'ordre, on a :

- 0 boules blanches :

On a :

$\binom{10}{5}$ façons de choisir 5 boules blanches parmi les 10.

$$\binom{10}{5} = 252$$

- 1 boule blanche :

$$\binom{5}{1} \times \binom{9}{4} = 630$$

- 2 boules blanches :

- 3 boules blanches

$$\binom{5}{2} \times \binom{9}{3} = 840$$

- 4 boules blanches :

$$\binom{5}{3} \times \binom{9}{2} = 360$$

- 5 boules blanches :

$$\binom{5}{4} \times \binom{9}{1} = 40$$

$$\binom{5}{5} \times \binom{9}{0} = 1$$

Ainsi le nombre de tirages différents est :

$$1 + 360 + 840 + 630 + 252 = 2083$$

b) On a déjà fait le calcul :

_ 2 boules blanches :

$$\binom{5}{2} \times \binom{9}{3} = 840$$

2) a) Si on tient compte de l'ordre on a **15!** tirages différents.

b) On sait qu'il y a **840 tirages** qui donne 2 boules blanches et 3 boules noires.