

Programme de colle n°26
(18 mai au 22 mai)

Matrices d'une application linéaire

- Matrice d'une application linéaire, d'un vecteur
- Endomorphismes, isomorphismes et matrices de changement de bases.
- Application linéaire canoniquement associée

Dénombrement

- Cardinal d'un ensemble
- Cardinal d'une sous-partie d'un ensemble fini E
- Principe des tiroirs, fonctions injectives, surjectives et cardinal
- Combinaison et arrangement

Démo de cours

Propriété :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$$

Application II.c.3 : on pose :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts}$$

Propriété III.a.1 : Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie ayant pour bases respectives B et B'. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F), x \in E$. On a alors :

$$y = u(x) \Rightarrow \text{mat}_{B',B'}(y) = \text{mat}_{B',B'}(u) \times \text{mat}_B(x)$$

Application II.b.8 : Soit E un ensemble fini. Montrer que :

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X| = n2^{n-1}$$

Exercices de cours

- _ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée
- _ Savoir écrire une application linéaire lorsque l'on connaît sa matrice dans une base donnée.

Exercice A.4 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer l'expression de f.
- 2) Calculer f^2 . En déduire que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- 3) Déterminer $\text{rg}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f))$ puis en déduire une base du noyau et de l'image de f.
- 4) Déterminer une base de \mathbb{R}^3 telle que :

$$\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice B.3 : Soit E un ensemble de 10 entiers différents compris entre 1 et 100. Démontrer qu'il existe deux sous-ensembles de E non vides et disjoints ayant la même somme.

Exercice B.4 : Soit E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples (X,Y) avec : $X \subset Y \subset E$?

Exercice B.5 : Montrer de deux manières différentes que :

$$\forall (p, q, r) \in \mathbb{N}^3, \text{ tel que } r \leq p + q, \sum_{i=0}^r \binom{p}{i} \binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$