

## Correction DM n°6 bis

**Problème 2 : Les séries de Fourier**

Le but de ce problème est de démontrer la décomposition d'une fonction périodique grâce aux séries de Fourier, dans un cadre un peu restreint, celui des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , ce qui est tout de même excellent. Dans toute la suite de ce problème, on pose  $\mathcal{T}_{2\pi}^1$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique et de classe  $\mathcal{C}^1$ . Dans tout ce problème  $n$  et  $m$  désignent des entiers naturels,  $m \neq 0$ .

**Partie A : Une famille libre de  $\mathcal{T}_{2\pi}^1$  et les coefficients de Fourier**

1) Montrer que  $\mathcal{T}_{2\pi}^1$  est un espace vectoriel.

2) On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(nx) \end{cases} \text{ et } s_n: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(nx) \end{cases}$$

a) Calculer :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{N}^2, C_{k,k'} = \int_0^{2\pi} c_k(x) c_{k'}(x) dx$$

b) De même calculer :

$$\forall (k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2, S_{k,k'} = \int_0^{2\pi} s_k(x) s_{k'}(x) dx$$

c) Enfin calculer :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, D_{k,k'} = \int_0^{2\pi} c_k(x) s_{k'}(x) dx$$

d) On définit :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, \mathcal{F}_{n,m} = (c_0, c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_m)$$

Montrer que la famille  $\mathcal{F}_{n,m}$  est libre dans  $\mathcal{T}_{2\pi}^1$ .

2) Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels,  $m \neq 0$ . Dans cette question on pose :

$$f \in \text{vect}(\mathcal{F}_{n,m})$$

On a ainsi :

$$\exists (a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{n+1+m} \text{ tel que } f = \sum_{k=0}^n a_k c_k + \sum_{k=1}^m b_k s_k$$

a) Démontrer que :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

b) Démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt$$

c) De même démontrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

On doit montrer à présent que :

$$\forall f \in \mathcal{T}_{2\pi}^1, \exists (a_n(f), b_n(f)) \in (\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R})^{\mathbb{N}^*} \text{ tel que :}$$

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f) c_k + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(f) s_k = a_0(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k(f) c_k + b_k(f) s_k)$$

**Partie B : la décomposition en série de Fourier : Le noyau de Dirichlet**

Soit  $f \in \mathcal{T}_{2\pi}^1$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit dans cette partie la fonction  $S_n(f)$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Avec :

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \text{ et } b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

On veut montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(f)(x) - f(x)| = 0$$

1) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

Avec

$$D_n: x \mapsto \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx) \right)$$

2) a) Montrer que :

$$\forall g \in \mathcal{T}_{2\pi}^1, \forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt$$

3) a) Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0[2\pi], D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

b) Montrer que  $D_n$  est paire,  $2\pi$ -périodique et :

$$\int_0^{2\pi} D_n(t) dt = 1$$

c) Démontrer que l'application :

$$g: \begin{cases} ]0; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{cases}$$

Peut-être prolongée par continuité en 0 et  $2\pi$ , on notera ce prolongement  $g$  pour la suite.

4) a) Démontrer que :

$$\forall h \in \mathcal{C}^1([a, b]), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(nt) dt = 0$$

b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} |S_n(f)(x) - f(x)| = 0$$

On a ainsi démontré que :

$$\forall f \in \mathcal{T}_{2\pi}^1, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \right) \cos(kx) + \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \right) \sin(kx) \right)$$

## Partie A : Une famille libre de $\mathcal{T}_{2\pi}^1$ et les coefficients de Fourier

1) On a :

- $\mathcal{T}_{2\pi}^1 \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
- $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} : x \mapsto 0 \in \mathcal{T}_{2\pi}^1$
- Soient  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (f_1, f_2) \in (\mathcal{T}_{2\pi}^1)^2$ , on pose :  $g = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ . On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x + 2\pi) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x + 2\pi) = \lambda_1 f_1(x + 2\pi) + \lambda_2 f_2(x + 2\pi) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = g(x)$$

Ainsi on a  $g$   $2\pi$ -périodique.

De plus on a  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ .

2) a) On a :

$$\begin{aligned} \forall (k, k') \in \mathbb{N}^2, C_{k, k'} &= \int_0^{2\pi} c_k(x) c_{k'}(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(k'x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k + k')x) + \cos((k - k')x) dx \end{aligned}$$

### 1<sup>er</sup> cas : Si $k = k' = 0$

On a alors :

$$C_{0,0} = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$$

### 2<sup>ième</sup> cas : Si $k = k' \neq 0$

On a :

$$C_{k,k} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2kx) + 1 dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2k} \sin(2kx) + x \right]_0^{2\pi} = \pi$$

### 3<sup>ième</sup> cas : Si $k \neq k'$

On a :

$$C_{k, k'} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k + k')x) + \cos((k - k')x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k + k'} \sin((k + k')x) + \frac{1}{k - k'} \sin((k - k')x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

b) De la même façon on a :

$$\begin{aligned} \forall (k, k') \in (\mathbb{N}^*)^2, S_{k, k'} &= \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(k'x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k - k')x) - \cos((k + k')x) dx \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, S_{k,k} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2kx) dx = \pi$$

Si  $k \neq k'$ , on a :

$$S_{k, k'} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k - k')x) - \cos((k + k')x) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k - k'} \sin((k - k')x) - \frac{1}{k + k'} \sin((k + k')x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

c) On a :

$$\begin{aligned} \forall (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, D_{k, k'} &= \int_0^{2\pi} c_k(x) s_{k'}(x) dx = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(k'x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((k' + k)x) + \sin((k' - k)x) dx \end{aligned}$$

### 1<sup>er</sup> cas : Si $k = k'$

$$D_{k,k} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{k'+k} \cos((k'+k)x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $k \neq k'$

$$D_{k,k'} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{k'+k} \cos((k'+k)x) - \frac{1}{k'-k} \cos((k'-k)x) \right]_0^{2\pi} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall (k, k') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, D_{k,k'} = 0$$

d) On résout :

$$\lambda_0 c_0 + \dots + \lambda_n c_n + \mu_1 s_1 + \dots + \mu_m s_m = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 c_0(x) + \dots + \lambda_n c_n(x) + \mu_1 s_1(x) + \dots + \mu_m s_m(x) = 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall x \in [0; 2\pi], \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \\ \lambda_0 c_0(x) c_k(x) + \dots + \lambda_n c_n(x) c_k(x) + \mu_1 s_1(x) c_k(x) + \dots + \mu_m s_m(x) c_k(x) = 0$$

On a donc :

$$\int_0^{2\pi} [\lambda_0 c_0(x) c_k(x) + \dots + \lambda_n c_n(x) c_k(x) + \mu_1 s_1(x) c_k(x) + \dots + \mu_m s_m(x) c_k(x)] dx = \int_0^{2\pi} 0 dx$$

Donc par linéarité :

$$\lambda_0 \int_0^{2\pi} c_0(x) c_k(x) dx + \dots + \lambda_n \int_0^{2\pi} c_n(x) c_k(x) dx + \mu_1 \int_0^{2\pi} s_1(x) c_k(x) dx + \dots + \mu_m \int_0^{2\pi} s_m(x) c_k(x) dx = 0$$

On a donc si  $k = 0$  :

$$\lambda_0 \times 2\pi = 0 \text{ donc } \lambda_0 = 0$$

Si  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$\lambda_k \pi = 0 \text{ donc } \lambda_k = 0$$

De même on résout :

$$\mu_1 s_1 + \dots + \mu_m s_m = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

On a donc :

$$\forall x \in [0; 2\pi], \forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket, \\ \mu_1 s_1(x) s_k(x) + \dots + \mu_m s_m(x) s_k(x) = 0$$

De la même façon que précédemment en passant à l'intégrale :

$$\mu_k \times \pi = 0 \text{ donc } \mu_k = 0$$

On en déduit donc que  $\mathcal{F}_{n,m}$  est une famille libre.

2) a) On fait la même chose que précédemment :

$$f = \sum_{k=0}^n a_k c_k + \sum_{k=1}^m b_k s_k \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(kx) \\ \Rightarrow \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(kx) \right) dx \\ = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx + \sum_{k=1}^m b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx \\ = 2\pi a_0$$

Ainsi on a :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

b) De même on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(kx) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(x) \cos(ix) &= \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) \cos(ix) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(kx) \cos(ix) \\ \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \int_0^{2\pi} f(x) \cos(ix) dx &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(ix) dx + \sum_{k=1}^m b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(ix) dx \\ &= a_i \times \pi\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(ix) dx$$

c) On fait la même chose :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, f(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(kx) \\ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f(x) \sin(ix) &= \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx) \sin(ix) + \sum_{k=1}^m b_k \sin(kx) \sin(ix) \\ \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \int_0^{2\pi} f(x) \sin(ix) dx &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(ix) dx + \sum_{k=1}^m b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(ix) dx \\ &= b_i \times \pi\end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$$

### Partie B : la décomposition en série de Fourier : Le noyau de Dirichlet

1) On a :

$$\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \times \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(k(x-t)) \right) dt$$

Par l'linéarité de l'intégrale on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k(x-t)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) [\cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \mathbf{S_n(f)(x)}\end{aligned}$$

2) a) Soient  $g \in \mathcal{T}_{2\pi}^1$ . On pose :

$$G: a \mapsto \int_a^{a+2\pi} g(t) dt - \int_0^{2\pi} g(t) dt, a \in \mathbb{R}$$

$G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  et  $\forall a \in \mathbb{R}, G'(a) = g(a+2\pi) - g(a) = 0$  car  $g$  est  $2\pi$ -périodique

Ainsi  $G$  est constante.

De plus on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, G(a) = G(0) = \int_0^{2\pi} g(t)dt - \int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$$

Ainsi on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+2\pi} g(t)dt = \int_0^{2\pi} g(t)dt$$

b) On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

On pose le changement de variable  $u = x - t$

### 1) On change les bornes

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = x \\ t = 2\pi \Rightarrow u = x - 2\pi \end{cases}$$

### 2) On calcule de $dt$

$$u = x - t \Rightarrow du = -dt$$

### 3) On remplace

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)dt &= \int_x^{x-2\pi} f(x-u)D_n(u)(-du) \\ &= \int_{x-2\pi}^x f(x-u)D_n(u)du \end{aligned}$$

De plus on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [x - 2\pi, x], f(x - u - 2\pi)D_n(u + 2\pi) = f(x - u)D_n(u) \text{ car } D_n \text{ est } 2\pi - \text{périodique}$$

Donc on peut appliquer ce que l'on a fait précédemment :

$$\int_{x-2\pi}^x f(x-u)D_n(u)du = \int_0^{2\pi} f(x-u)D_n(u)du$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

3) a) On a :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0[2\pi], D_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kt) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left( \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n (e^{ikt} + e^{-ikt}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} + \frac{1 - e^{-i(n+1)t}}{1 - e^{-it}} - 2 \right) \text{ car } e^{it} \neq 1 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( -1 + \frac{e^{\frac{i(n+1)t}{2}} \left( e^{-\frac{i(n+1)t}{2}} - e^{\frac{i(n+1)t}{2}} \right)}{e^{\frac{it}{2}} \left( e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}} \right)} + \frac{e^{-\frac{i(n+1)t}{2}} \left( e^{\frac{i(n+1)t}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)t}{2}} \right)}{e^{-\frac{it}{2}} \left( e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( -1 + e^{\frac{in}{2}t} \frac{-2i \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} + e^{-\frac{in}{2}t} \frac{2i \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left( -1 + \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} (2 \cos(nt)) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-\sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right]$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0[2\pi], D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, D_n(x + 2\pi) &= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(k(x + 2\pi)) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx + 2k\pi) \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left( 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos(kx) \right) \text{ car } \cos \text{ est } 2\pi\text{-périodique et } k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

De plus on a par linéarité :

$$\int_0^{2\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left( \underbrace{\int_0^{2\pi} 1 dx}_{=2\pi} + \sum_{k=1}^n 2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kx) dx}_{=0} \right) = 1$$

c) On pose :

$$g: \begin{cases} ]0; 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{cases}$$

On sait que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $h: t \mapsto f(x-t)$  admet un  $DL_1$  en 0. On a :

$$h(t) = h(0) + h'(0)t + o(t)$$

On en déduit donc que :

$$f(x-t) = f(x) - f'(x)t + o(t)$$

On en déduit donc que :

$$f(x-t) - f(x) = -f'(x)t + o(t)$$

De plus on sait que :

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2} + o\left(\frac{t}{2}\right)$$

On en déduit donc que :

$$g(t) = -\frac{f'(x)}{2} + o(1)$$

Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = -\frac{f'(x)}{2}$$

Donc  $g$  est prolongeable par continuité en 0.

De même on a :

$$\forall t \in ]0; 2\pi[, g(2\pi - t) = \frac{f(x+t-2\pi) - f(x)}{\sin\left(\pi - \frac{t}{2}\right)} = \frac{f(x+t) - f(x)}{-\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{f'(x)t + o(t)}{-\frac{t}{2} + o(t)} = -\frac{f'(x)}{2} + o(1)$$

Ainsi on a :

$$\lim_{t \rightarrow 2\pi} g(t) = -\frac{f'(x)}{2}$$

Donc  $g$  est également prolongeable par continuité en  $2\pi$ .

4) a) On a par IPP :

$$\forall h \in \mathcal{C}^1([a, b]), \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_a^b h(t) \sin(nt) dt = \left[ -\frac{\cos(nt)}{n} h(t) \right]_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b h'(t) \cos(nt) dt$$

On en déduit donc que :

$$\left| \int_a^b h(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{2}{n} M + \frac{1}{n} (b-a) M' \text{ avec } M = \sup_{x \in [a, b]} |h(x)| \text{ et } M' = \sup_{x \in [a, b]} |h'(x)|$$

**Remarque** : On peut poser :

$$\sup_{x \in [a, b]} |h(x)| = \|h\|_\infty \text{ et } \sup_{x \in [a, b]} |h'(x)| = \|h'\|_\infty \text{ car } h \text{ et } h' \text{ sont continues sur le segment } [a, b]$$

On a donc :

$$\forall h \in \mathcal{C}^1([a, b]), \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b h(t) \sin(nt) dt \right| \leq \frac{K}{n} \text{ avec } K = 2M + (b-a)M'$$

Or on a :

$$\lim_n \frac{K}{n} = 0$$

Ainsi on a :

$$\forall h \in \mathcal{C}^1([a, b]), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b h(t) \sin(nt) dt = 0$$

b) On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) - f(x) &= \int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t) dt - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(f(x-t) - f(x))}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \end{aligned}$$

Avec  $\tilde{g}$  défini dans la question précédente :

$$\tilde{g}: \begin{cases} [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in ]0; 2\pi[ \\ -\frac{f'(x)}{2} & \text{si } t = 0 \text{ ou } 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

Or  $\tilde{g}$  est continue sur  $[0; 2\pi]$ . Pour appliquer le théorème précédent, il faut avoir  $\tilde{g}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Cependant pour démontrer cela il faudrait pouvoir dériver  $\tilde{g}$  (ce qui est faisable sur  $]0; 2\pi[$ ) puis regarder si  $(\tilde{g})'$  admet une limite en 0 et  $2\pi$ , puis utiliser le théorème de la limite-dérivée (appelé aussi théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$ ). Cependant le dénominateur sera du  $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$  donc il faudrait pouvoir faire un  $DL_2(0)$  du numérateur. Cependant on ne sait rien de plus sur  $f$  que le fait que  $f'$  soit continue. On ne peut donc pas faire de  $DL_2(0)$  de  $f(x-t) - f(x)$ . Il faut trouver une autre parade.

En fait il faut prouver le théorème de la question précédente (appelé le lemme de Riemann-Lebesgue) mais avec une hypothèse plus faible, celle de la continuité.

On veut montrer ici que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \lim_n \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

### Première idée :

On sait que toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Ainsi on a :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M$$

On voudrait utiliser ensuite la croissance de l'intégrale mais on ne sait pas le signe de  $\sin(nt)$ , même entre 0 et  $2\pi$ , ce dernier change souvent.

### Deuxième idée :

On pose :

$$I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$$

On effectue le changement de variable  $u = t - \frac{\pi}{n}$

#### 1) Les nouvelles bornes :

$$\begin{cases} t = a \Rightarrow u = a - \frac{\pi}{n} \\ t = b \Rightarrow u = b - \frac{\pi}{n} \end{cases}$$

#### 2) dt = du

#### 3) On remplace

$$I_n = \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nu + \pi) dt = - \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nu) dt$$

On a alors :

$$\begin{aligned} 2I_n &= \int_a^b f(t) \sin(nt) dt - \int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nu) dt \\ &= \int_{b-\frac{\pi}{n}}^b f(t) \sin(nt) dt - \int_{a-\frac{\pi}{n}}^a f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nu) dt + \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} \left(f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\right) \sin(nu) dt \end{aligned}$$

On a donc d'après l'inégalité triangulaire :

$$|2I_n| \leq \int_{b-\frac{\pi}{n}}^b |f(t) \sin(nt)| dt + \int_{a-\frac{\pi}{n}}^a \left|f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nu)\right| dt + \left| \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} \left(f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right)\right) \sin(nu) dt \right|$$

De plus on sait que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi on a :

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall t \in [a, b], m \leq f(t) \leq M$$

Ainsi on a :

$$\int_{b-\frac{\pi}{n}}^b |f(t) \sin(nt)| dt + \int_{a-\frac{\pi}{n}}^a \left|f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nu)\right| dt \leq 2 \frac{M\pi}{n}$$

Il reste à faire :

$$\left| \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} \left( f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \right) \sin(nu) dt \right|$$

On sait que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} \left( f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \right) \sin(nu) dt \right| &\leq \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} \left| \left( f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \right) \sin(nu) \right| dt \\ &\leq \int_a^b \left| \left( f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \right) \sin(nu) \right| dt \leq \int_a^b \left| \left( f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \right) \right| dt \end{aligned}$$

Or on sait que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  donc  $f$  est uniformément continue (c'est le théorème de Heine), mais en PCSI on peut utiliser le fait que  $f$  soit  $K$ -lipchitzienne :

$$\left| \left( f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \right) \right| \leq \frac{K\pi}{n}$$

On a alors :

$$\left| \int_a^{b-\frac{\pi}{n}} \left( f(u) - f\left(u + \frac{\pi}{n}\right) \right) \sin(nu) dt \right| \leq \frac{K\pi}{n} (b - a)$$

Ainsi on a :

$$2I_n \leq \frac{K\pi}{n} (b - a) + 2 \frac{M\pi}{n}$$

Or on a :

$$\lim_n \frac{K\pi}{n} (b - a) + 2 \frac{M\pi}{n} = 0$$

Donc  $I_n \rightarrow 0$ .

Ainsi on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |S_n(f)(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \rightarrow 0$$

D'après la question précédente.

On a donc bien :

$$\forall f \in \mathcal{T}_{2\pi}^1, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \right) \cos(kx) + \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt \right) \sin(kx) \right)$$