

Correction DM n°6

Problème 1: Formule de Stirling

Le but de ce problème est de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie A : Convergence de deux suites

On considère les deux suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \text{ et } v_n = \ln(u_n)$$

- 1) Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$.
- 2) En déduire que (v_n) converge.
- 3) Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie II : Calcul de la constante k

Dans cette partie on souhaite prouver que $k = \sqrt{2\pi}$.

On pose la suite (W_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

- 1) a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

- b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

- 2) Démontrer que la suite $nW_n W_{n+1}$ est constante.
- 3) En déduire que :

$$\frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \sim \pi$$

- 4) Conclure que $k = \sqrt{2\pi}$.

Partie A :

1) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Or on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{\sqrt{n+1}} \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{1}{\frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n} = e \times \frac{n+1}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \times n^{n+\frac{1}{2}} = e \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

De plus on sait que :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &= 1 - \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{n}{2(n+1)^2} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{n}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

2) On sait que :

$$v_n - v_{n+1} \sim \frac{1}{12} \times \frac{1}{(n+1)^2}$$

De plus on sait que :

$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge car $2 > 1$ et on applique le critère de Riemann.

D'après le théorème de convergence des séries à termes positifs, on en déduit donc que $(\sum (v_n - v_{n+1}))$ converge.

On a donc :

$$\lim_n \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = S \in \mathbb{R}^-$$

Or on sait que :

$$\sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n v_{n+1} = S + v_1$$

Ainsi la suite (v_n) converge.

3) On sait que (v_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\lim_n \ln(u_n) = \ell$$

Comme \ln est continue sur son ensemble de définition, on a :

$$\lim_n u_n = e^\ell = k > 0$$

On en déduit donc que :

$$\frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \sim k$$

Par produit on a :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Partie B :

1) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)} \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} dt$$

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1}(t) \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = (n+1)(-\sin(t)) \cos^n(t) \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \underbrace{[\cos^{n+1}(t) \times \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin(t)) \cos^n(t) \sin(t) dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^n(t) dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

b) On veut démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Méthode 1 : Par récurrence :

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = "W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}"$$

Initialisation :

$$\frac{(0)!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$$

Donc P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. On suppose vraie P_n .

On a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2(n+1)}{2^2(n+1)(n+1)} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_0 vraie et P_n héréditaire implique par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \frac{2n-5}{2n-4} W_{2n-6} \\ &\quad \vdots \text{ On réitère le procédé } n \text{ fois} \\ &= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} W_0 \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \dots \times \frac{1}{2} &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times \dots \times 2} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n \times (n-1) \times \dots \times 1} \\ &= \frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 1}{2^n n!} \end{aligned}$$

$$= \frac{2n(2n-1) \times (2n-2) \times (2n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}{2^n n! \times 2n \times (2n-2) \dots \times 2}$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

C'est la même chose que la question précédente, soit par récurrence ou par itération de la formule de récurrence.

Comme on ne nous donne pas de formule à démontrer, nous allons le faire grâce à la méthode 2.

Méthode 2 : Par itération de la formule de récurrence :

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3}$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} W_{2n-5}$$

∴ On réitère le procédé n fois

$$= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} W_1$$

Or on sait que :

$$W_1 = 1$$

De plus on a :

$$\frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} = \frac{2^n n!}{(2n+1) \times (2n-1) \dots \times 3}$$

$$= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

2) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n \Rightarrow u_{n+1} = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = u_n$$

Ainsi la suite (u_n) est constante.

3) On sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq W_{n+1} \leq W_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}}$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{W_{n-1}}{W_{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc que :

$$W_n \sim W_{n+1}$$

De plus on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = u_0 = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit donc que :

$$(n+1)(W_n)^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

On a donc :

$$(2n+2)(W_{2n+1})^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

Ainsi on a :

$$(2n+1) \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \right)^2 \sim \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2}{2n+1} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \sim \pi \Rightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2 \sim \pi$$

4) On sait que :

$$\pi = \lim_n \frac{1}{n} \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)^2$$

Par continuité de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ on a :

$$\sqrt{\pi} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \times \left(\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \right)$$

De plus on sait que :

$$n! \sim k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

On en déduit donc que :

$$\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{2^{2n} \left(k\sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \right)^2}{k\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e} \right)^{2n}} = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{2\pi}$$