Chapitre 26 : Probabilités
Partie A : Introduction

I) Langage des probabilités.

a) Expérience aléatoire

Définition : Une expérience est dite « **aléatoire** » lorsqu'on ne peut pas prévoir l'issue de l'expérience.

Exemple I.a.1 : Déterminer deux expériences aléatoires.

b) L'univers et les évènements élémentaires

Définition : L'**univers** est l'ensemble de tous les résultats possibles. On le note en général : Ω
Chaque résultat possible se nomme « **issue** » ou « **évènement élémentaire** ».

Exemple I.b.1 : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes classiques. Déterminer l'univers et les issues de cette expérience aléatoire.

Remarque : L'univers d'une expérience aléatoire peut être :
- Fini
- Infini dénombrable
- Infini non dénombrable

Exemple I.b.2 : Déterminer deux expériences aléatoires dont l'univers est infini dénombrable et l'autre infini non dénombrable.

Remarque : En PCSI on n'étudiera que des univers finis.

c) Evénement

Définition : Un **évènement** est une partie de l'univers Ω. Un événement qui contient une seule issue est un événement élémentaire.

Exemple I.c.1 : On lance deux dés 6, un rouge et un vert. Donner l'univers, une issue et un évènement non élémentaire.

d) Evénements particuliers

Définition : Un événement qui ne contient aucune issue est un **évènement impossible**, noté $\emptyset$. Un événement qui contient toutes les issues est un **évènement certain**.

Exemple I.d.1 : On lance deux dés 6, un rouge et un vert. Donner un évènement impossible et un évènement certain.

Définition : Pour tout événement A, il existe **l'événement contraire** de A, noté $\overline{A}$. Il est composé des événements élémentaires de l'univers Ω qui ne sont pas dans A.

Exemple I.d.1 : Un match de ligue 2 oppose Auxerre à Troyes. On pose l'évènement :
$A =$ "Auxerre gagne ».
Déterminer l'évènement contraire $\overline{A}$.

Définition : Deux événements sont **incompatibles** s'ils ne peuvent avoir lieu en même temps.

Exemple I.d.2 : On lance deux dés 6, un rouge et un vert. Déterminer deux évènements incompatibles.

e) Intersection et réunion d´évènements.

Définition : Soient A et B deux évènements de Ω.

- L´évènement constitué des issues appartenant à A et à B est noté **A∩B** (se lit « A inter B » ou « A et B »).
- L´évènement constitué des issues appartenant à A ou à B est noté **AUB** (se lit « A union B » ou « A ou B »).

Exemple I.e.1 : On lance deux dés 6, un rouge et un vert, soient A = « La somme fait 8 », B = « Le résultat du dé rouge est paire ». Déterminer A∩B et A∪B.

Remarque : si A∩B = ∅ on dit que les évènements A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**.

II) Espaces probabilisés finis

a) Définition

Définition : Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire. On appelle probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω une application $\mathbb{P}\colon \Omega \to [0;1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall (\mathrm{A};\mathrm{B}) \in \Omega^2, A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\mathrm{A}) + \mathbb{P}(\mathrm{B})$

On appelle espace probabilisé fini un couple $(\Omega, \mathbb{P})$ où Ω est un univers fini et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

Exemple II.a.1 : On lance un dé 6. Définir deux probabilités sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Propriété II.a.2 : Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A et B deux évènements. On a :
(1) $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
(2) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
(3) $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
(4) $A \subset B \implies \mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
(5) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Application II.a.3 : Dans un lycée de 250 élèves, il y a 84 personnes qui font du latin, 78 qui font du grec, dont 13 qui font les deux disciplines. On choisit un élève au hasard dans le lycée, déterminer la probabilité qu'il fasse ou du grec, ou du latin.

***Application II.a.4* :** Soit $(\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{n})$ une famille de n évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. On a alors :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_\mathrm{n}) \leq \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \dots + \mathbb{P}(\mathrm{A}_\mathrm{n})$$

b) Existence d'une probabilité

Propriété II.b.1 : Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_\mathrm{n}\}$ et $\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{n}$ des réels. On a alors équivalence entre :
(1) Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que :

$$\forall \mathrm{i} \in [\![1, \mathrm{n}]\!], \mathbb{P}(\{\omega_\mathrm{i}\}) = \mathrm{p}_\mathrm{i}$$

(2) Tous les réels p_i sont positifs et :

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{p}_\mathrm{i} = 1$$

Remarque : Dans ce cas la probabilité $\mathbb{P}$ est unique et :

$$\forall A \in \Omega, \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,\mathrm{n}]\!] \\ \omega_i \in A}} \mathbb{P}(\{\omega_\mathrm{i}\})$$

Application II.b.2 : Il existe une unique application $\mathbb{P}$ sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ telle que :

$$\forall \mathrm{i} \in [\![1, \mathrm{n}]\!], \mathbb{P}(\{\omega_\mathrm{i}\}) = \frac{1}{\mathrm{n}}$$

Ont dit que la probabilité $\mathbb{P}$ est **équiprobable**.