

Chapitre 27 : Déterminant
Partie A : Déterminant d'une matrice

Dans tout ce chapitre on pose \mathbb{K} l'ensemble des nombres réels ou complexes, E un espace vectoriel de dimension n , $n \geq 2$.

I) Forme multilinéaire alternée
a) Définition

Définition/propriété I.a.1 (Forme multilinéaire alternée) : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors il existe une unique application $\Phi: E^n \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

- Φ est multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ces variables :

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in E^n, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, X \mapsto \Phi(f_1, \dots, f_{j-1}, X, f_{j+1}, \dots, f_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$$
- Φ est alternée :

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in E^n, \forall 1 \leq i < j \leq n, f_i = f_j \Rightarrow \Phi(f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_n) = 0$$
- $\Phi(e_1, \dots, e_n) = 1$

Φ est alors appelé le déterminant dans la base \mathcal{B} de E , noté $\det_{\mathcal{B}}: E^n \rightarrow \mathbb{K}$.

Exemple I.a.2 : Déterminer $\det_{\mathcal{B}_c}$ pour $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

b) Opérations et premiers calculs

Propriété I.b.1 (Opérations sur le déterminant) : On a :

1) Si $(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F}$ contient O_E alors son déterminant est nul.

$$O_E \in \mathcal{F} \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$

2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = -\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, f_n))$$

3) Les transvections ne changent pas le déterminant :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i + \lambda \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = \det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) \quad (i \neq j)$$

Application I.b.2 : Calculer :

$$\det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

Application I.b.3 : Calculer :

$$\det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^3)} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Application I.b.4 : Calculer :

$$\det_{\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_3[X])}(3, 3 + 5X, 8 + 12X - 2X^2 - 3X^3, 12X^2 - X^3)$$

Propriété I.b.5 : Si f est une forme multilinéaire (on parle aussi de forme n -linéaire) alternée sur E^n , alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$f = \lambda \times \det_{\mathcal{B}}$$

Propriété I.b.6 (déterminant entre deux bases) : Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . On a alors :

$$\forall (f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F} \in E^n, \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Proposition I.b.7 (Caractérisation des bases par le déterminant) :

$$\mathcal{F} \text{ base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

II) Déterminant d'une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a) Les colonnes associées à des vecteurs

Définition : Soit $A = (C_1, \dots, C_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut associer alors chaque colonne C_i à un vecteur de \mathbb{R}^n exprimé dans la base canonique :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, C_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(x_i)$$

On peut alors définir le déterminant de A , noté $\det(A)$ par :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_c}(x_1, \dots, x_n)$$

On utilise alors une **notation particulière**.

Exemple II.a.1 : Calculer :

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b) Cas particulier des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

Propriété II.b.1 : On a :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Application II.b.2 : Calculer $\det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Propriété II.b.3 : On a :

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

Remarque : On appelle cela la règle de Sarrus !

Application II.b.4 : Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

c) Cas particuliers des matrices triangulaires

Propriété II.c.1 : Soit $T = (t_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. On a alors :

$$\det(T) = t_{1,1} \times t_{2,2} \times \dots \times t_{n,n} = \prod_{i=1}^n t_{i,i}$$

Exemple II.c.2: Calculer :

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 125 \\ 0 & 4 & 120 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 87 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

Remarque : Pour calculer le déterminant d'une matrice, on peut donc appliquer un pivot de Gauss (pour l'instant sur les colonnes) pour se ramener à une matrice triangulaire supérieure ! Attention toutefois à la valeur des pivots !

Application II.c.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$