Correction TD 25

Partie A : Définition

Exercice A.1 : Déterminer les matrices dans les bases canoniques respectives des applications linéaires suivantes :

$$\text{a) } u_1:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\\ P\mapsto P(1)\end{cases},\ \text{b) } u_2:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\\ P\mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)dt\end{cases},\ \text{c) } u_3:\begin{cases}\mathbb{C}_3[X]\to\mathbb{C}_3[X]\\ P\mapsto P(X+1)-P(X)\end{cases},\ \text{d) } u_4:\begin{cases}\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X]\\ P\mapsto P+P'\end{cases}$$

$\mathbf{a)}\ u_1:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\\ P\mapsto P(1)\end{cases}$

On a :

$$\forall k\in[\![1,n]\!], u_1(X^k)=1$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}(u_1)=\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

$\mathbf{b)}\ u_2:\begin{cases}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\\ P\mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)dt\end{cases}$

On a :

$$\forall k\in[\![1,n]\!], u_2(X^k)=\frac{1}{k+1}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{(1,X,\dots,X^n)}(u_2)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1}\end{pmatrix}$$

$\mathbf{c)}\ u_3:\begin{cases}\mathbb{C}_3[X]\to\mathbb{C}_3[X]\\ P\mapsto P(X+1)-P(X)\end{cases}$

On a :

$$u_3(1)=0, u_3(X)=1, u_3(X^2)=1+2X, u_3(X^3)=1+3X+3X^2$$

On a donc :

$$\mathrm{mat}_{(1,X,X^2X^3)}(u_3)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathbf{d)}\ u_4:\begin{cases}\mathbb{R}_3[X]\to\mathbb{R}_3[X]\\ P\mapsto P+P'\end{cases}$

On a :

$$u_4(1)=1, u_4(X)=1+X, u_4(X^2)=X^2+2X, u_4(X^3)=X^3+3X^2$$

On a donc :

$$\mathrm{mat}_{(1,X,X^2X^3)}(u_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Exercice A.2 : Soit $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On pose :

$$\varphi_A:\begin{cases}\mathcal{M}_2(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{K})\\ M\mapsto AM\end{cases}$$

a) Montrer que $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$

b) Donner sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

a) On sait que :

$$\forall (M_1, M_2) \in \left(\mathcal{M}_2(\mathbb{K})\right)^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi_A(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2)$$
$$= \lambda A M_1 + A M_2$$
$$= \lambda \varphi_A(M_1) + \varphi_A(M_2)$$

Donc φ_A est linéaire.

b) On sait que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

De plus on a :

$$\varphi_A\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\varphi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice A.3 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de f.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$et $\mathrm{Im}(f)$.
3) Démontrer qu'ils sont en sous directe.
4) Déterminer une base B de Ker(f) et une base B' de Im(f) puis écrire $\mathrm{mat}_{B \cup B'}(f)$.
5) Ecrire f comme la composée de deux endomorphismes connus.

1) On a :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} \end{cases}$$

2) **i) On cherche $\ker(f)$**

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ -x + 2y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \ \ (L_1) + (L_2) = -(L_3) \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = z \\ -x + 2y = z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\ker(f)=\left\{\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix},x\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

ii) On cherche $\mathrm{Im}(f)$

On a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$$

De plus on voit que :

$$\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$$

3) Montrons que :

$$\mathbb{R}^3=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$$

i) $\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(\mathbb{R}^3)$

On sait que :

$$\ker(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\Longrightarrow\dim(\ker(f))=1$$

De plus :

$$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)\Longrightarrow\dim(\mathrm{Im}(f))=\mathrm{rg}(f)=2\text{ (les vecteurs ne sont pas colinéaires)}$$

On a donc :

$$\dim(\ker(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=3=\dim(\mathbb{R}^3)$$

ii) $\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Soir $e=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\ \mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)$. On a donc :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases}2\lambda_1-\lambda_2=\lambda\\-\lambda_1+2\lambda_2=\lambda\\-\lambda_1-\lambda_2=\lambda\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$\lambda_2=\frac{\lambda}{3}=\lambda\Longrightarrow\lambda=0\Longrightarrow e=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f)\cap\ker(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

On a donc :

$$\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$$

4) On a déjà les deux bases voules :

$$\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right),\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$$

On calcule les images :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\-3\\-3\end{pmatrix}=0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}=0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+3\times\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathrm{B}\cup\mathrm{B}'}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

5) On peut remarquer que :

$$\mathrm{mat}_{\mathrm{B}\cup\mathrm{B}'}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$f=g\circ h \text{ avec : } f:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x\\3y\\3z\end{pmatrix}\end{cases} \text{ et } h:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\end{cases}$$

On a alors $g=3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et h est le projecteur sur le plan $(P): x=0$ parallèlement à la droite d'équation $(D): \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Exercice A.4 : Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix}3&-3&6\\1&-1&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de f.
2) Calculer f^2. En déduire que $\mathrm{Im}(f)\subset\mathrm{Ker}(f)$.
3) Déterminer $\mathrm{rg}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ puis en déduire une base du noyau et de l'image de f.
4) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$\mathrm{mat}_{\mathrm{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

1) On a :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x-3y+6z\\x-y+2z\\-x+y-2z\end{pmatrix}\end{cases}$$

2) On peut calculer f^2 ou bien A^2 ce qui ensuite revient au même :

$$A=\begin{pmatrix}3&-3&6\\1&-1&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3$$

On a donc $f^2=0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

On a donc :

$$\forall y \in \mathrm{Im}(f), \exists e \in \mathbb{R}^3, f(e) = y \Longrightarrow f(y) = f^2(e) = 0$$

Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$

3) On cherche $\mathbf{ker(f)}$.

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y + 2z = 0$$

On en déduit donc que :

$$\ker(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - y + 2z = 0\right\} = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On a donc $\dim(\ker(f)) = 2$.

D'après le théorème du rang on en déduit que :

$$\mathrm{rg}(f) = 1$$

De plus $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$. Il reste à déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$. On sait que $\mathrm{rg}(f) = 1$ il faut donc trouver un seul vecteur non nul qui appartient à $\mathrm{Im}(f)$. On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

4) On cherche une base de $\mathbb{R}^3, \mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ telle que $f(e_1) = e_2$ et $f(e_2) = f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

D'après les questions précédentes on pose :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On vérifie facilement que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre donc une base de $\mathbb{R}^3$ et on a :

$$\mathrm{mat}_{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Ainsi les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice A.5 : Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{\imath}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

a) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

b) Même question avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(\vec{\imath} - \vec{\jmath}, -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Même question avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$

Il faut écrire f.

On sait que :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix}\end{cases}$$

a) On a donc :

$$u\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ et } u\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(f)=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

b) De plus on sait que $\mathcal{B}'=\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus on a :

$$u\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \text{ et } u\left(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}2 & -5\\0 & 0\end{pmatrix}$$

c) Enfin on a :

$$u\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

De même on a :

$$u\left(\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}=(-15)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+(-5)\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}6 & -15\\2 & -5\end{pmatrix}$$

Exercice A.6 : Soit $A=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ \vdots & & \iddots & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

En utilisant l'application linéaire canoniquement associée à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, calculer A^p pour $p\in\mathbb{Z}$.

On pose $\mathcal{B}_c=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_c}(f)=\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1\\ \vdots & & \iddots & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\forall i\in[\![1,n]\!], f(e_i)=e_{n-i}$$

On en déduit donc que :

$$\forall i\in[\![1,n]\!], f^2(e_i)=f(e_{n-i})=e_i$$

On en déduit donc que $f^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. On a donc :

$$\forall p\in\mathbb{Z}, A^p=\begin{cases}I_n \text{ si } |p| \text{est pair}\\ \quad A \text{ sinon}\end{cases}$$

Partie B : Matrices de changement de bases

Exercice B.1 : On pose $\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

b) On pose : $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

a) On sait que $\#B = 4$ il suffit donc de montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \lambda_4 = \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^4$.

b) **On doit décomposer** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **dans la base** $\left(\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right)$.

On a :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On peut aussi le faire de cette façon :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Or on sait que :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = -1\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 1\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 0\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (-1)\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-4\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Exercice B.2 : On considère la base canonique de $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$

a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ et la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$.

c) On pose :

$$u : \begin{cases}\mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]\\ \quad P \mapsto P'\end{cases}$$

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_c$ puis dans la base $\mathcal{B}$.

a) On sait que la $\mathcal{B} = \big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ est libre car c'est une famille de polynômes échelonnés. De plus $\#B = 4$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Il suffit d'écrire :

$$P_{B_c,B} = \mathrm{mat}_{B,B_c}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Pour déterminer $P_{B,B_c} = \mathrm{mat}_{B_c,B}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ on peut inverser la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ ou exprimer les vecteurs de la base B_c dans la base B :

$$X^2 = X(X-1) + X \text{ et } X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$$

On a alors :

$$P_{B,B_c} = \mathrm{mat}_{B_c,B}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

c) Il suffit de calculer les images des vecteurs de base :

$$u(1) = 0, u(X) = 1, u(X^2) = 2X \text{ et } u(X^3) = 3X^2$$

On a alors :

$$\mathrm{mat}_{(1,X,X^2,X^3)}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

De même on a :

$$u(1)=0,u(X)=1,u\big(X(X-1)\big)=2X-1 \text{ et}$$
$$u\big(X(X-1)(X-2)\big)=3X^2-6X+2=3X(X-1)-3X+2$$

On a donc :

$$\mathrm{mat}_{(1,X,X^2-X,X^3-3X^2+2X)}(u)=\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Remarque : On peut dire que les deux matrices $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ sont semblables et on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{\mathrm{mat}_{B_c}(u)}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{=P_{B_c,B}}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&-1&2\\0&0&2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{=\mathrm{mat}_B(u)}\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}}_{=P_{B,B_c}}$$

Exercice B.3 : Déterminer la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan $x+y-z=0$ parallèlement à la droite $\mathrm{vect}\big((1,1,1)\big)$.

On sait que :

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3, x+y-z=0\right\}=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

De plus on a :

$$\forall\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(z-y)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(z-x)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+(y+x-z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$u:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}z-y\\z-x\\2z-x-y\end{pmatrix}\end{cases}$$

On en déduit donc que :

$$M=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

Exercice B.4 : On note $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Soit $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire suivante :

$$u:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x+4y\\-x+y\\2x-2y\end{pmatrix}\end{cases}$$

1) On pose $e'_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, e'_2=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2)$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Ecrire les matrices de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

2) Soit $f'_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, f'_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, f'_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\mathcal{C}'=(f'_1,f'_2,f'_3)$

a) Montrer que $\mathcal{C}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Ecrire les matrices de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ puis de $\mathcal{C}'$ à $\mathcal{C}$.

3) Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{u}), \mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(\mathrm{u}), \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(\mathrm{u})$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{u})$.

1) a) Comme $\#\mathcal{B}' = 2$ il suffit de montrer que $\mathcal{B}'$ est libre :
On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or on sait que $\det\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right) = 3 \times 5 - (-2) \times 1 = 17 \neq 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{B}'$ est libre.
b) On a :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B_c},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathrm{B_c}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2) a) Idem que précédemment il suffit de montrer que $\mathcal{C}'$ est libre. On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

On en déduit donc que $\mathcal{C}'$ est libre.
b) On a :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus on a :

$$\mathrm{P}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut décomposer les vecteurs de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{C}'$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{P}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}$$

3) On a :

$$u:\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+4y \\ -x+y \\ 2x-2y \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

De même on a :

$$u\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, u\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ -2 & 7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$$

De même on a :

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = (-3) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 \\ \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$$

Enfin on a :

$$u\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \left(-\frac{9}{2}\right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{13}{2} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{9}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ -14 \end{pmatrix} = (-14) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-14) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & -14 \\ \frac{13}{2} & 7 \\ -\frac{9}{2} & -14 \end{pmatrix}$$

Exercice B.5 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u:\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (10x - y\text{-}z, \text{-}6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{cases}$$

a) Déterminer $A = \mathrm{mat}_{B_c}(u)$.

b) Montrer que $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer :

$$C = \mathrm{mat}_B(u)$$

c) Calculer A^n.

a) On a :

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

b) On pose $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. On sait que $\#B = 3$. Ainsi pour montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre. On résout :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{car } \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \right) = -2 - 4 \neq 0 \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

On en déduit donc que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc la famille $\mathcal{B}$ est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
On calcule :

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$C = \mathrm{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

c) On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{mat}_B(u)^n = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}^n = \mathrm{mat}_B(u^n)$$

De plus par une récurrence triviale on démontre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{mat}_B(u^n) = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$$

On cherche à présent $\mathrm{mat}_{B_c}(u^n)$.

Méthode 1 : Avec la décomposition des vecteurs dans la base $B = \left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

On a :

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = y \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{6}(2x + y + z) \\ \lambda_2 = \frac{2}{3}(x - y - z) \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}(-2x + y - z) \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{6}(2x + y + z)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}(4x - y - z)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{6}(-6x + 3y - 3z)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = u^n\left(\frac{1}{6}(2x + y + z)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}(4x - y - z)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \frac{1}{6}(-6x + 3y - 3z)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(2x + y + z)u^n\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{6}(4x - y - z)u^n\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\right) + \frac{1}{6}(-6x + 3y - 3z)u^n\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{6^n}{6}(2x + y + z)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \frac{12^n}{6}(4x - y - z)\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + \frac{12^n}{6}(-6x + 3y - 3z)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= 6^{n-1}\begin{pmatrix} (2x + y + z) + 2^n(4x - y - z) \\ 3(2x + y + z) + 2^n(-2x + 3y - 3z) \\ (2x + y + z) - 2^{n+1}(4x - y - z) - 2^n(-6x + 3y - 3z) \end{pmatrix}$$

$$= 6^{n-1}\begin{pmatrix} (2 + 4 \times 2^n)x + (1 - 2^n)y + (1 - 2^n)z \\ (6 - 2^{n+1})x + (3 + 3 \times 2^n)y + (3 - 3 \times 2^n)z \\ (2 - 2^{n+1})x + (1 - 2^n)y + (1 + 5 \times 2^n)z \end{pmatrix}$$

On an donc :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(u^n) = A^n = 6^{n-1}\begin{pmatrix} 2 + 4 \times 2^n & 1 - 2^n & 1 - 2^n \\ 6 - 2^{n+1} & 3 + 3 \times 2^n & 3 - 3 \times 2^n \\ 2 - 2^{n+1} & 1 - 2^n & 1 + 5 \times 2^n \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On utilise la formule suivante (dite de changement de bases) :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(u) = \mathrm{mat}_{B,B_c}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \times \mathrm{mat}_B(u) \times \mathrm{mat}_{B_c,B}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$$

On sait que :

$$\mathrm{mat}_{B,B_c}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = P_{B_c,B}$$

$$\mathrm{mat}_B(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{mat}_{B_c,B}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{mat}_{B,B_c}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^{-1} = P_{B_c,B} = P_{B,B_c}^{-1}$$

Pour déterminer la dernière matrice, soit on inverse la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ à l'aide des méthodes que l'on connait (système ou pivot de Gauss), soit on exprime les vecteurs de la base canonique dans la base B :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B},\mathrm{B_c}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=P^{-1}$$

On en déduit donc que :

$$\begin{pmatrix}10&-1&-1\\-6&9&-3\\-2&-1&11\end{pmatrix}=\mathrm{PDP}^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&0&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&12&0\\0&0&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Par une récurrence immédiate on en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$$

On a donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&0&1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6^n&0&0\\0&12^n&0\\0&0&12^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$=6^{n-1}\begin{pmatrix}2+4\times2^n&1-2^n&1-2^n\\6-2^{n+1}&3+3\times2^n&3-3\times2^n\\2-2^{n+1}&1-2^n&1+5\times2^n\end{pmatrix}$$

Exercice B.6 : On considère la matrice :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\3&-2&0\\-2&2&1\end{pmatrix}$$

On pose u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique.

a) Montrer que $\ker(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}),\ker(u-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}),\ker(u+4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ sont de dimension 1 et en donner des bases.

b) Montrer que $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_{-4})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ avec $e_i=\ker(u-i.\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$

c) Donner la matrice D de u dans cette base. En déduire le calcul de A^n pour tout entier naturel n.

a) On pose :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\\\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2y-z\\3x-2y\\-2x+2y+z\end{pmatrix}\end{cases}$$

i) On cherche $\ker(u-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = y = z$$

On en déduit que :

$$\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\dim(\ker(u - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = 1$

ii) On cherche $\ker(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}y = -2z$$

On en déduit que :

$$\ker(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\dim(\ker(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = 1$

iii) On cherche $\ker(u + 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$

On résout :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = -4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}y = z$$

On en déduit que :

$$\ker(u - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Donc $\dim(\ker(u + 4\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})) = 1$

b) On pose :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

On veut montrer que cela forme une base de $\mathbb{R}^3$. En raison du cardinal de $\mathcal{B}$ qui est 3 il suffit de montrer qu'elle est libre :

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montrons que $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

On a trois pivots donc la matrice est inversible donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ forme bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice B.7 : On pose :

$$u: \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z) \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice dans la base canonique de u.
b) Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ker(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
d) Déterminer de deux façons différentes u^n.

a) On a :

$$\mathrm{mat}_{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) On résout :

$$u\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = \lambda x \\ x + 2y + z = \lambda y \\ x + y + 2z = \lambda z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda)x + y + z = 0 \\ x + (2 - \lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On pose $P_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. On sait que $\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ si et seulement si P_λ admet au plus deux pivots !
On a :

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-(2-\lambda)^2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -3+4\lambda-\lambda^2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

On résout :

$$-3+4\lambda-\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+3=0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1,3\}$$

On a donc :

$$P_\lambda \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

<u>1^{er} cas : $\lambda = 1$:</u>

On a :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\dim(\ker(u-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}))=2$$

<u>$2^{ième}$ cas : $\lambda = 3$:</u>

On a :

$$P_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\dim(\ker(u-3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}))=0$$

<u>$3^{ième}$ cas $\lambda \notin \{1,3\}$:</u>

$$P_\lambda \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) & 1-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\dim(\ker(u-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}))=1$$

De plus on a :

$$\forall \lambda \notin \{1,4\}, \ker(u-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

c) On cherche une base de $\ker(u-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$

On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0$$

On en déduit donc que :

$$\ker(u-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

De même on cherche une base de $\ker(u-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)=4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$$

On en déduit donc que :

$$\ker(u-4\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On a donc :

$$u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)=4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à démontrer que $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. On parle alors d'une base de vecteurs propres.

Pour une raison de cardinal, il suffit de montrer que la famille est libre. On résout :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\Longrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

On a donc $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et :

$$\mathrm{mat}_{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}(\mathrm{u})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

d) On cherche u^{n}.

Méthode 1 : Avec le binôme de Newton.

On sait que :

$$\mathrm{mat}_{\mathrm{B_c}}(\mathrm{u}^{\mathrm{n}})=\mathrm{mat}_{\mathrm{B_c}}(\mathrm{u})^{\mathrm{n}}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}^{\mathrm{n}}$$

De plus on sait que :

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}^{\mathrm{n}}=\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}_{=\mathrm{J}}+\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=\mathrm{I_3}}\right)^{\mathrm{n}}=(\mathrm{I_3}+\mathrm{J})^{\mathrm{n}}$$

Or on sait que $\mathrm{I_3}$ et J commutent. On peut donc appliquer le binôme de Newton :

$$(\mathrm{I_3}+\mathrm{J})^{\mathrm{n}}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\mathrm{J}^{\mathrm{k}}(\mathrm{I_3})^{\mathrm{n-k}}$$

$$=\mathrm{I_3}+\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\mathrm{J}^{\mathrm{k}}$$

De plus on sait que (démonstration par récurrence immédiate) que :

$$\forall \mathrm{k}\in\mathbb{N}^*,\mathrm{J}^{\mathrm{k}}=3^{\mathrm{k}-1}\mathrm{J}$$

On a donc :

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\mathrm{J}^{\mathrm{k}}=\frac{1}{3}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}3^{\mathrm{k}}\right)\mathrm{J}$$

De plus on sait que :

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}3^{\mathrm{k}}=\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}3^{\mathrm{k}}=4^{\mathrm{n}}-1$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\mathrm{J}^{\mathrm{k}}=\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}\mathrm{J}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}^{\mathrm{n}}=\mathrm{I_3}+\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}\mathrm{J}=\begin{pmatrix}\frac{4^{\mathrm{n}}+2}{3}&\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}&\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}\\\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}&\frac{4^{\mathrm{n}}+2}{3}&\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}\\\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}&\frac{4^{\mathrm{n}}-1}{3}&\frac{4^{\mathrm{n}}+2}{3}\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$u^n : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3}x + \frac{4^n-1}{3}y + \frac{4^n-1}{3}z \\ \frac{4^n-1}{3}x + \frac{4^n+2}{3}y + \frac{4^n-1}{3}z \\ \frac{4^n-1}{3}x + \frac{4^n-1}{3}y + \frac{4^n+2}{3}z \end{pmatrix} \end{cases}$$

Méthode 2 : Avec les matrices de changement de bases

On sait que :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(u) = P_{B_c,B} \times \mathrm{mat}_B(u) \times P_{B,B_c} = PDP^{-1}$$

De plus on sait que :

$$P_{B_c,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il reste à déterminer $P_{B,B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ soit en utilisant le binôme de Newton soit en exprimant les vecteurs de la base canonique dans la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. C'est cette méthode que je choisis :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

De plus par une récurrence immédiate on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4^n \\ 0 & 1 & 4^n \\ -1 & -1 & 4^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$u^n : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3}x + \frac{4^n-1}{3}y + \frac{4^n-1}{3}z \\ \frac{4^n-1}{3}x + \frac{4^n+2}{3}y + \frac{4^n-1}{3}z \\ \frac{4^n-1}{3}x + \frac{4^n-1}{3}y + \frac{4^n+2}{3}z \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Partie C : Rang d'une matrice

Exercice C.1 : Déterminer le rang des matrices suivantes et si elle existe déterminer son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D_c = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut déterminer le rang de A par plusieurs méthodes.

Méthode 1 : On cherche le nombre de pivots de A

On a :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que A a deux pivots donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ donc $A \notin GL_3(\mathbb{R})$.

Méthode 2 : On cherche le noyau de A, ker(A)

On résout :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \quad (-5L_1) - L_2 = 3L_3 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = -z \\ x + y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = -z$$

On en déduit donc que :

$$\ker(A) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Donc $\dim(\ker(A)) = 1$ donc d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(A) = 2 \Longrightarrow A \notin GL_3(\mathbb{R})$.

On pose :

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\\1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

On peut déterminer le rang de B par plusieurs méthodes.

Méthode 1 : On cherche le nombre de pivots de B

On a :

$$B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & 1\\1 & 3 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & -1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que B a deux pivots donc $\mathrm{rg}(B) = 2$ donc $B \notin GL_3(\mathbb{R})$.

Méthode 2 : On cherche le noyau de B, $\ker(B)$

On résout :

$$B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \quad (3L_1) - L_2 = L_3 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{2}z$$

On en déduit donc que :

$$\ker(B) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

Donc $\dim(\ker(B)) = 1$ donc d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(B) = 2 \Longrightarrow B \notin GL_3(\mathbb{R})$.

On pose :

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

On peut déterminer le rang de C par plusieurs méthodes.

Méthode 1 : On cherche le nombre de pivots de C

On a :

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que C a 3 pivots donc $\mathrm{rg}(C) = 3$ donc $C \in GL_3(\mathbb{R})$.

Méthode 2 : On cherche le noyau de C, $\ker(C)$

On résout :

$$C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0$$

On en déduit donc que :

$$\ker(C) = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Donc $\dim(\ker(C)) = 1$ donc d'après le théorème du rang $\mathrm{rg}(C) = 3 \Longrightarrow C \in GL_3(\mathbb{R})$.
Il reste à déterminer l'inverse de C.
soit en utilisant le binôme de Newton soit en exprimant les vecteurs de la base canonique dans la base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. C'est cette méthode que je choisis :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \frac{-1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$D_c = \begin{pmatrix}c & 1 & 1\\1 & c & 1\\1 & 1 & c\end{pmatrix}$$

On peut déterminer le rang de D_c par plusieurs méthodes.
On a :

$$D_c = \begin{pmatrix}c & 1 & 1\\1 & c & 1\\1 & 1 & c\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & c & 1\\c & 1 & 1\\1 & 1 & c\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & c & c\\0 & 1-c^2 & 1-c\\0 & 1-c & c-1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & c & c\\0 & (1-c)(1+c) & 1-c\\0 & 1-c & c-1\end{pmatrix}$$

<u>1^er cas : $c = 1$</u>

$$D_1 \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que D_1 a 1 pivots donc $\mathrm{rg}(D_1) = 1$ donc $D_1 \notin GL_3(\mathbb{R})$.

<u>2^ième cas : $c \neq 1$</u>

On a :

$$D_c \sim \begin{pmatrix}1 & c & c\\0 & 1+c & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & c & c\\0 & 1 & -1\\0 & 1+c & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & c & c\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 2+c\end{pmatrix}$$

Si $c = -2$ alors D_{-2} a 2 pivots donc $D_{-2} \notin GL_3(\mathbb{R})$.
Si $c \notin \{1, -2\}$, D_c admet 3 pivots et donc $D_c \in GL_3(\mathbb{R})$.
Il reste à déterminer sont inverse !

On exprime les vecteurs de la base canonique à l'aide de la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}c\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\c\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix}\right)$

On a :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{c+1}{(c-1)(2+c)}\begin{pmatrix}c\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{(2+c)(1-c)}\begin{pmatrix}1\\c\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{(2+c)(1-c)}\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{(2+c)(1-c)}\begin{pmatrix}c\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{c+1}{(c-1)(2+c)}\begin{pmatrix}1\\c\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{(2+c)(1-c)}\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{(2+c)(1-c)}\begin{pmatrix}c\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{(2+c)(1-c)}\begin{pmatrix}1\\c\\1\end{pmatrix}+\frac{c+1}{(c-1)(2+c)}\begin{pmatrix}1\\1\\c\end{pmatrix}$$

On en déduit donc que :

$$\forall c\notin\{-2,1\},\begin{pmatrix}c&1&1\\1&c&1\\1&1&c\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{c+1}{(c-1)(2+c)}&\frac{1}{(2+c)(1-c)}&\frac{1}{(2+c)(1-c)}\\\frac{1}{(2+c)(1-c)}&\frac{c+1}{(c-1)(2+c)}&\frac{1}{(2+c)(1-c)}\\\frac{1}{(2+c)(1-c)}&\frac{1}{(2+c)(1-c)}&\frac{c+1}{(c-1)(2+c)}\end{pmatrix}$$

Exercice C.2 : 1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de rang 1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'une colonne non nulle.
2) Soit f un endomorphisme tel que :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(f)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$$

a) Déterminer le rang de f. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Ces sous-espaces sont-ils supplémentaires ?
b) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.

1) On sait que $f\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $\mathrm{rg}(f)=1$. D'après le théorème du rang on a donc $\dim(\ker(f))=n-1$.
On pose $(e_1,\dots,e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$. On complète cette base en une base de $\mathbb{K}^n$ d'après le théorème de la base incomplète. On a donc :
$(e_1,\dots,e_{n-1},e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ avec $f(e_n)\neq 0_{\mathbb{K}^n}$ car $e_n\notin\ker(f)$.
On pose :

$$f(e_n)=\sum_{k=1}^{n}a_ke_k\text{ où }\exists i\in[\![1,n]\!],a_i\neq 0$$

On a alors :

$$\mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u)=\begin{pmatrix}0&\dots&0&a_1\\\vdots&&\vdots&\vdots\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\dots&0&a_n\end{pmatrix}$$

2) a) On a :

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{mat}_{B_c}(f)$ a 1 seul pivot donc $\mathrm{rg}(f)=1$. On en déduit donc que $\dim(\ker(f))=2$.
Il reste à chercher deux vecteurs non colinéaires de $\ker(f)$ pour en avoir une base.
On a :

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\ker(f)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

A présent on a :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

Comme $\mathrm{rg}(f)=\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)=1$ on en déduit que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\right)$$

De plus ces espaces ne sont pas supplémentaires car :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ ou encore } \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires.

b) On a déjà une base de $\ker(f)$: $\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Il reste à présent à déterminer un troisième vecteur linéairement indépendant de la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. On pose $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. On a alors :

$$\mathrm{mat}_{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)}(f) = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Exercice C.3 : 1) Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est de rang 1 si et seulement s'il existe une matrice colonne non nulle $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice ligne non nulle $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ telles que $M = CL$.
2) Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $u^2 = \mathrm{Tr}(u)u$.
b) Que peut-on dire lorsque sa trace vaut 1 ?
c) Montrer que $\mathcal{L}(E)$ possède une base formée de projecteurs.

1) On note $M = (C_1, \dots, C_p)$ où C_i désigne la $i-$ième colonne de M.

Comme $\mathrm{rg}(M) = 1$ on sait qu'il existe $i_0 \in [\![1;p]\!]$ tel que $C_{i_0} \neq \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et :

$$\forall i \in [\![1;p]\!], \exists \lambda_i \in \mathbb{K}, C_i = \lambda_i C_{i_0}$$

On a donc :

$$M = C_{i_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

2) On pose $\dim(E) = n$. On sait que $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(u) = 1$. D'après le théorème du rang on a donc $\dim(\ker(f)) = n - 1$.
On pose $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\ker(f)$. On complète cette base en une base de $\mathbb{K}^n$ d'après le théorème de la base incomplète. On a donc :
$(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ avec $f(e_n) \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ car $e_n \notin \ker(f)$.
On pose :

$$f(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \text{ où } \exists i \in [\![1,n]\!], a_i \neq 0$$

On a alors :

$$\mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u) = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & a_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & a_n\end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\mathrm{Tr}(u) = a_n = \mathrm{Tr}(M)$$

De plus on a :

$$\mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u^2) = \mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n^2 \end{pmatrix}$$
$$= a_n \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{Tr}(M)M$$

On en déduit donc que :

$$\mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u^2) = \mathrm{Tr}(u)\mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(u) \Leftrightarrow u^2 = \mathrm{Tr}(u)u$$

b) Si la trace est égale à 1 on a alors $u^2 = u$ on peut donc en déduire que u est un projecteur.

c) soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(E) = n$ et :

$$\mathrm{mat}_{B_c}(u) = A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

On a alors :

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} a_{i,i}E_{i,i} + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} a_{i,j}\left(E_{i,j} + E_{n,n}\right) + \left(a_{n,n} - \sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} a_{i,j}\right)E_{n,n}$$

On pose :

$$\mathcal{B} = \left(E_{1,1}, \dots, E_{n,n}\right) \cup \bigcup_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} \left(E_{i,j} + E_{n,n}\right)$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus on pose :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \mathrm{mat}_{B_c}\left(u_{i,j}\right) = \begin{cases} E_{i,j} + E_{n,n} \text{ si } i \neq j \\ \quad E_{i,j} \text{ sinon} \end{cases}$$

On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \begin{cases} \mathrm{rg}\left(u_{i,j}\right) = 1 \\ \mathrm{Tr}\left(u_{i,j}\right) = 1 \end{cases}$$

Ce sont donc des projecteurs d'après la question précédente et ils forment une base de $\mathcal{L}(E)$ d'après ce que l'on vient de démontrer.