

**Programme de colle n°27**  
**(25 au 29 mai)**

**Matrices d'une application linéaire**

- Matrice d'une application linéaire, d'un vecteur
- Endomorphismes, isomorphismes et matrices de changement de bases.

**Probabilité**

- Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$
- Probabilité conditionnelle
- Evènements indépendants

**Déterminant**

- Déterminant d'une famille de vecteurs

**Démo de cours**

**Propriété (Formule des probabilités totales) I.c.1:** Soit  $A_1, \dots, A_n$  une partition de l'univers d'une expérience aléatoire. Soit  $B$  un évènement de cette expérience. On a alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

**Propriété II.a.1 :** On a les équivalences suivantes :

$$A \cup B \Leftrightarrow A \cup \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \cup B \Leftrightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$$

**Application II.c.3 :** on pose :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M(a_0, a_1, \dots, a_n) \in GL_{n+1}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont deux à deux distincts}$$

**Propriété I.b.1 (Opérations sur le déterminant) :** On a :

1) Si  $(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F}$  contient  $O_E$  alors son déterminant est nul.

$$O_E \in \mathcal{F} \Rightarrow \det_B(\mathcal{F}) = 0$$

2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :

$$\det_B((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = -\det_B((f_1, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, f_n))$$

3) Les transvections ne changent pas le déterminant :

$$\det_B((f_1, \dots, \mathbf{f}_i + \lambda \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = \det_B((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) \quad (i \neq j)$$

**Exercices de cours**

\_ Savoir écrire la matrice d'une application linéaire dans une base donnée

\_ Savoir écrire une application linéaire lorsque l'on connaît sa matrice dans une base donnée.

\_ Tenter de démontrer que deux matrices sont semblables, écrire la relation qui lie les deux...

**Exercice A.4 :** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer l'expression de  $f$ .

2) Calculer  $f^2$ . En déduire que  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ .

3) Déterminer  $\text{rg}(f)$  et  $\dim(\text{Ker}(f))$  puis en déduire une base du noyau et de l'image de  $f$ .

4) Déterminer une base de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

$$\text{mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Application I.a.2 :** On pose :

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer l'application linéaire  $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\text{mat}_{B_c}(\varphi) = M$   
 b) Déterminer  $M^{-1}$ .

**Exercices A.1 :** Dix paires de chaussures distinctes sont toutes rangées dans un placard. On prend au hasard quatre chaussures. Quelle est la probabilité :

- 1) D'obtenir deux paires de chaussures ?
- 2) D'obtenir au moins une paire de chaussure ?
- 3) D'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

**Exercices A.2 :** Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :

- 1) On tire deux boules simultanément.
- 2) On tire une boule, on ne la remet pas, puis on en tire une autre.
- 3) On tire une boule, on la remet, puis on en tire une autre.

**Exercice B.3 :** Le fonctionnement au cours du temps d'un appareil possédant une maintenance obéit aux règles suivantes :

- S'il fonctionne à la date  $n-1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il a la probabilité  $a$  de toujours fonctionner à la date  $n$ .
- S'il passe à la date  $n-1$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), il a la probabilité  $b$  d'être encore en panne à la date  $n$ .

Où  $(a, b)$  est un couple de réels de  $[0,1]$ . On suppose que l'appareil est en état de marche à la date 0. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $M_n$  l'évènement « l'appareil est en état de marche à la date  $n$  » et  $p_n$  la probabilité de  $M_n$ .

- 1) Déterminer  $p_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Déterminer la limite de la suite  $(p_n)$ .

**Exercice B.4 :** Deux urnes A et B contiennent respectivement 6 boules blanches et 5 noires d'une part, 4 blanches et 8 noires d'autre part. On transfère au hasard deux boules de l'urne B dans l'urne A puis on tire au hasard une boule dans l'urne A.

- 1) Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.
- 2) Déterminer la probabilité que l'une au moins des deux boules transférées soit blanche sachant que la boule tirée était blanche.

**Exercice B.5 :** On dispose de  $N+1$  urnes, numérotées de 0 à  $N$ . L'urne  $k$  contient  $k$  boules blanches et  $N-k$  boules noires. On choisit une urne au hasard, et, sans connaître son numéro, on en tire  $n$  fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

- 1) Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant que, au cours des  $n$  premiers tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?
- 2) Calculer la suite de cette probabilité lorsque  $N$  tend vers l'infini.