

Correction DS n°7

Exercice 1 : Dénombrement, les nombres de Stirling de deuxième espèce

Soit $E = (e_1, \dots, e_p)$ un ensemble à p éléments et $F = (f_1, \dots, f_n)$ un ensemble à n éléments, $p, n \in (\mathbb{N}^*)^2$. On définit le nombre de Stirling de deuxième espèce, noté $S_{p,n}$, le nombre de surjection qu'il existe entre E et F . Le but de cet exercice est de démontrer la formule suivante :

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

- 1) Que vaut $S_{p,n}$ si $p < n$.
- 2) Déterminer $S_{n,n}$.
- 3) Démontrer que :

$$S_{n,n+1} = n \times \frac{(n+1)!}{2}$$

- 4) On pose $u_{p,n}$ le nombre d'applications qu'il existe entre E et F .
 - a) Déterminer $u_{p,n}$.
 - b) Par un raisonnement sur le dénombrement, démontrer que :

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

- 5) On pose l'application linéaire suivante :

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

- a) Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1} .
- b) On pose A la matrice de φ dans la base canonique. En expliquant pourquoi :

$$(u_{p,0} \ u_{p,1} \ \dots \ u_{p,n})A = (S_{p,0} \ S_{p,1} \ \dots \ S_{p,n})$$

Démontrer que :

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

1) Si $p < n$, alors on ne peut avoir de surjection entre E et F car F a « trop » d'éléments !

On a donc :

$$\forall p < n, S_{p,n} = 0$$

2) Si $n = p$ alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ donc une application surjective de E dans F est bijective. Or nous avons exactement $n!$ bijections de E dans F . En effet si l'on veut construire une bijection de E dans F , on a n choix pour le premier, $n-1$ pour le second, et ainsi de suite jusqu'au dernier qui n'a plus qu'un choix. Ainsi on a :

$$S_{n,n} = n \times (n-1) \times \dots \times 1 = n!$$

3) Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F) + 1$, alors si l'on a une application surjective de E dans F , on a exactement deux éléments qui ont le même antécédent, et les autres sont tous différents. Ainsi on choisit deux éléments parmi les $n+1$ de E , puis il reste à dénombrer le nombre de bijection entre deux éléments de même cardinal n . On a donc :

$$S_{n+1,n} = \binom{n+1}{2} \times n! = \frac{n(n+1)}{2} \times n! = n \times \frac{(n+1)!}{2}$$

4) a) Ici on a n choix pour l'image de e_1 , n choix pour l'image de e_2 et ainsi de suite jusqu'à n choix pour l'image de e_p . On a ainsi :

$$u_{n,p} = n^p$$

b) On pose :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, A_{p,i} = \{\phi: E \rightarrow F \text{ tel que } \text{Card}(\text{Im}(\phi)) = i\}$$

On a ainsi :

$$\{\phi: E \rightarrow F\} = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

[Tapez ici]

Ici on se donne une application $\phi: E \rightarrow F$. On regroupe ensuite l'ensemble des applications suivant le cardinal de son image $\phi(E)$. On démontre le nombre d'application qui ont une seule image dans F , puis 2 images dans E ...

On a alors :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

De plus on a :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Card}(A_i) = \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{Choix des } i \text{ images}} \times \underbrace{S_{p,i}}_{\text{Nombres de surjection de } E \text{ dans un ensemble à } i \text{ éléments}}$$

On a alors :

$$\text{Card}(\{\phi: E \rightarrow F\}) = n^p = \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} S_{p,i}$$

5) a) En posant :

$$\psi: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X-1) \end{cases}$$

On a : $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc φ est **bijjective** et :

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X-1) \end{cases}$$

b) On pose $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X_n)$ on a alors :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \varphi(X^k) = (1+X)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i$$

On a alors :

$$A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \binom{k}{0} & & \binom{n}{0} \\ 0 & 1 & & & \binom{k}{1} & & \binom{n}{1} \\ & 0 & \ddots & & 1 & & \binom{n}{2} \\ & & & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \binom{k}{k} & & \\ & \vdots & & & 0 & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 0 & & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

Or on sait que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{p,n} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

En posant $S_{p,0} = 0$ et $u_{p,0} = 0$ on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \forall n \in \mathbb{N}^*, n < p, u_{p,n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

Ainsi on a :

$$(u_{p,0} \ u_{p,1} \ \dots \ u_{p,n}) = (S_{p,0} \ S_{p,1} \ \dots \ S_{p,n})A \text{ (en posant } u_{p,0} = S_{p,0} = 0)$$

On en déduit donc que :

$$(S_{p,0} \ S_{p,1} \ \dots \ S_{p,n}) = (u_{p,0} \ u_{p,1} \ \dots \ u_{p,n})A^{-1}$$

Or on a :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \varphi^{-1}(X^k) = (X-1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} X^i$$

On a alors :

[Tapez ici]

$$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{\frac{x}{2}} dx = \left[2(1-x)e^{\frac{x}{2}} \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{\frac{x}{2}} dx = 2 + 4 \left[e^{\frac{x}{2}} - 1 \right] = 4\sqrt{e} - 2$$

2) a) On peut utiliser la concavité de $t \mapsto \ln(1+t)$. On sait que :

$$\forall t \in]-1; +\infty[, \ln(1+t) \leq t$$

On a donc :

$$\forall t \in [0; 1], -t > -1$$

On a donc :

$$\forall t \in [0; 1], \ln(1-t) \leq -t$$

b) On a d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n} \quad (\text{car } \frac{x}{n} \in [0; n])$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -x \quad (\text{car } n > 0)$$

Comme \exp est croissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \leq e^{-x} \quad (\text{car } \frac{x}{n} \in [0; n])$$

De plus si $x = n$, on a :

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right) = 0 \leq e^{-x}$$

On en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; n], \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

Par croissance de l'intégrale on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \leq \int_0^n e^{-x} \times e^{\frac{x}{2}} dx \leq \int_0^n e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Or on a :

$$\int_0^n e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^n = -2e^{-\frac{n}{2}} + 2 \leq 2$$

Ainsi on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq 2$$

3)

a) On pose :

$$f: \begin{cases} \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \ln(1-t) + t + t^2 \end{cases}$$

On a $f \in \mathcal{C}^1\left(\left[0; \frac{1}{2}\right]\right)$ et :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f'(t) = -\frac{1}{1-t} + 1 + 2t = \frac{-1 + 1 - t + 2t(1-t)}{1-t} \\ = t \times \frac{1-2t}{1-t}$$

Or on sait que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \begin{cases} t \geq 0 \\ 1-2t > 0 \\ 1-t > 0 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f'(t) \geq 0$$

Donc f est croissante et :

$$f(0) \geq 0$$

[Tapez ici]

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f(t) \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \ln(1-t) \geq -t - t^2$$

b) On a :

$$\forall n \geq 1, \forall a \in \left[0; \frac{n}{2}\right], \int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^a e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} e^{\frac{x}{2}} dx$$

Or on sait que :

$$\forall x \in [0; a], x \in \left[0; \frac{n}{2}\right] \text{ donc } \frac{x}{n} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

On a donc :

$$e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} \geq e^{-x - \frac{x^2}{n}} \text{ (car exp est croissante)}$$

Donc par croissance de l'intégrale on a :

$$\int_0^a e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} e^{\frac{x}{2}} dx \geq \int_0^a e^{-x - \frac{x^2}{n}} e^{\frac{x}{2}} dx \geq \int_0^a e^{-\frac{x^2}{n}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Or on a :

$$\forall x \in [0, a], -\frac{x^2}{n} \geq -\frac{a^2}{n}$$

On a donc :

$$\int_0^a e^{-\frac{x^2}{n}} e^{-\frac{x}{2}} dx \geq \int_0^a e^{-\frac{a^2}{n}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

Or on a :

$$\int_0^a e^{-\frac{a^2}{n}} e^{-\frac{x}{2}} dx = e^{-\frac{a^2}{n}} \int_0^a e^{-\frac{x}{2}} dx = 2e^{-\frac{a^2}{n}} \left(1 - e^{-\frac{a}{2}}\right)$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \forall a \in \left[0; \frac{n}{2}\right], \int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \geq 2e^{-\frac{a^2}{n}} \left(1 - e^{-\frac{a}{2}}\right)$$

c) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \forall a \in \left[0; \frac{n}{2}\right], I_n &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx + \int_a^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \text{ (d'après Chasles)} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall x \in [a, n], \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \geq 0$$

On en déduit donc que :

$$\int_a^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \geq 0$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \forall a \in \left[0; \frac{n}{2}\right], I_n \geq \int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \geq 2e^{-\frac{a^2}{n}} \left(1 - e^{-\frac{a}{2}}\right)$$

[Tapez ici]

4) a) On pose :

$$a = n^{\frac{1}{3}}$$

On a :

$$n^{\frac{1}{3}} \geq \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2n^{\frac{1}{3}} \geq n \Leftrightarrow 8n \geq n^3$$

Or $n > 0$ on a donc :

$$8n \geq n^3 \Rightarrow 8 \geq n^2 \Rightarrow n \geq 3$$

Ainsi on a :

$$\forall n \geq 3, n^{\frac{1}{3}} < \frac{n}{2}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 3, I_n \geq 2e^{-\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}} \right)$$

Or on a :

$$2e^{-\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}} \right) = 2e^{-\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}} \right)$$

Or on a :

$$\lim_n \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} = 0 \text{ et } \lim_n \frac{n^{\frac{1}{3}}}{2} = +\infty$$

Ainsi on a :

$$\lim_n 2e^{-\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}} \right) = 2$$

On a donc :

$$\forall n \geq 3, 2 \geq I_n \geq 2e^{-\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}} \right) \text{ et } \lim_n 2e^{-\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2n^{\frac{1}{3}}}} \right) = 2$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_n I_n = 2$$

Problème 1 : Un endomorphisme qui annule un polynôme scindé à racines simples

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $\dim(E) = n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la relation :

$$(\mathcal{R}): u^2 - 3u + 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On dit alors que u annule le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Le but de la première partie est de démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle u est diagonale.

Partie A : Une base diagonale

1) Déterminer les racines du polynôme P .

Dans toute la suite de ce problème on pose $v = u - Id_E$ et $w = u - 2Id_E$.

2) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ puis en déduire que $E = \text{Im}(v) + \text{Im}(u)$.

3) a) Démontrer que $E = \ker(v) \oplus \ker(w)$.

b) Comment peut-on obtenir une base de E dans laquelle la matrice u est diagonale ? On donnera la forme de la matrice de u dans la base considérée, en fonction de la dimension de $\ker(v)$ et de $\ker(w)$.

Partie B : Un exemple

On pose :

[Tapez ici]

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ a + bX + cX^2 \mapsto (a + b) + 2bX + (2c + b - a)X^2 \end{cases}$$

- 1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
- 2) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 3) Montrer que f vérifie la relation (\mathcal{R}) .
- 4)
 - a) En déduire une base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
 - b) Déterminer $f^k(a + bX + cX^2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque : Vous démontrerez l'an prochain qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Partie A : Une base diagonale

1) On a :

$$X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 2$$

2) On a :

$$v - w = (u - Id_E) - (u - 2Id_E) = Id_E$$

On a donc :

$$\forall e \in E, e = (u(e) - e) - (u(e) - 2e) = (u - Id_E)(e) - (u - 2Id_E)(e) = e_1 + e_2$$

Avec $e_1 = (u - Id_E)(e) \in \text{Im}(v)$ et $e_2 = -(u - 2Id_E)(e) \in \text{Im}(w)$

3) a)

- Montrons que $\ker(v) \cap \ker(w) = \{0_E\}$

On a :

$$e \in \ker(v) \cap \ker(w) \Rightarrow \begin{cases} (u - Id_E)(e) = 0_E \\ (u - 2Id_E)(e) = 0_E \end{cases} \Rightarrow e = 2e \Rightarrow e = 0_E$$

De plus on a :

$$u(0_E) = 0_E = 2 \cdot 0_E$$

Ainsi $0_E \in \ker(v) \cap \ker(w)$.

- Montrons que $\ker(v) + \ker(w) = E$

On sait que :

$$\forall e \in E, e = (u(e) - e) - (u(e) - 2e) = e_1 + e_2$$

Or on a :

$$e_1 = u(e) - e \text{ et } u^2 = 3u - 2Id_E$$

Ainsi on a :

$$u(e_1) = u^2(e) - u(e) = 3u(e) - 2e - u(e) = 2(u(e) - e) = 2e_1$$

Ainsi $e_1 \in \ker(w)$

De même on a :

$$e_2 = -(u(e) - 2e) \Rightarrow u(e_2) = -u^2(e) + 2u(e) = -3u(e) + 2e + 2u(e) = 2e - u(e) = e_2$$

Ainsi $e_2 \in \ker(v)$

On en déduit donc que :

$$\forall e \in E, e = \underbrace{(u(e) - e)}_{\in \ker(w)} + \underbrace{(2e - u(e))}_{\in \ker(v)}$$

Ainsi on a :

$$\ker(v) + \ker(w) = E$$

On a donc

$$E = \ker(v) \oplus \ker(w)$$

3) Il suffit de prendre une base de $\ker(v)$ et $\ker(w)$. On pose : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_v \cup \mathcal{B}_w$ avec \mathcal{B}_v une base de $\ker(v)$ et \mathcal{B}_w une base de $\ker(w)$. Donc pose $d_v = \dim(\ker(v)) = \text{card}(\mathcal{B}_v)$ et $d_w = \dim(\ker(w)) = \text{card}(\mathcal{B}_w)$.

On a alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} (I_{d_v}) & (0_{d_v, d_w}) \\ (0_{d_w, d_v}) & (-I_{d_w}) \end{pmatrix}$$

[Tapez ici]

Partie B : Un exemple

1) On a :

$$\begin{aligned} \forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda P + Q) &= f((\lambda p_0 + q_0) + (\lambda p_1 + q_1)X + (\lambda p_2 + q_2)X^2) \\ &= (\lambda p_0 + q_0 + \lambda p_1 + q_1) + 2(\lambda p_1 + q_1)X + (2(\lambda p_2 + q_2) + (\lambda p_1 + q_1) - (\lambda p_0 + q_0))X^2 \\ &= \lambda(p_0 + p_1 + 2p_1X + (2p_2 + p_1 - p_0)X^2) + (q_0 + q_1 + 2q_1X + (2q_2 + q_1 - q_0)X^2) \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Ainsi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.2) On cherche $\ker(f)$. On a : . On a :

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\Leftrightarrow f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow p_0 + p_1 + 2p_1X + (2p_2 + p_1 - p_0)X^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_0 + p_1 = 0 \\ p_1 = 0 \\ 2p_2 + p_1 - p_0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow p_0 = p_1 = p_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned} \forall P \in \mathbb{R}_2[X], f^2(p_0 + p_1X + p_2X^2) &= f(p_0 + p_1 + 2p_1X + (2p_2 + p_1 - p_0)X^2) \\ &= p_0 + 3p_1 + 4p_1X + (2((2p_2 + p_1 - p_0)) + 2p_1 - (p_0 + p_1))X^2 \\ &= p_0 + 3p_1 + 4p_1X + (4p_2 + 3p_1 - 3p_0)X^2 \\ &= 3(p_0 + p_1 + 2p_1X + (2p_2 + p_1 - p_0)X^2) - 2(p_0 + p_1X + p_2X^2) \\ &= 3f(P) - 2P \end{aligned}$$

Ainsi f vérifie la relation :

$$f^2 = 3f - 2Id_E$$

4) a) On va chercher une base de $\ker(f - Id_{\mathbb{R}_2[X]})$.

On résout :

$$\begin{aligned} f(P) = P &\Leftrightarrow f(p_0 + p_1X + p_2X^2) = p_0 + p_1X + p_2X^2 \\ &\Leftrightarrow p_0 + p_1 + 2p_1X + (2p_2 + p_1 - p_0)X^2 = p_0 + p_1X + p_2X^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_0 + p_1 = p_0 \\ 2p_1 = p_1 \\ 2p_2 + p_1 - p_0 = p_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_0 = p_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\ker(f - Id_{\mathbb{R}_2[X]}) = \text{vect}(1 + X^2)$$

De même on cherche une base de $\ker(f - 2Id_{\mathbb{R}_2[X]})$.

On résout :

$$\begin{aligned} f(P) = 2P &\Leftrightarrow f(p_0 + p_1X + p_2X^2) = 2p_0 + 2p_1X + 2p_2X^2 \\ &\Leftrightarrow p_0 + p_1 + 2p_1X + (2p_2 + p_1 - p_0)X^2 = 2p_0 + 2p_1X + 2p_2X^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_0 + p_1 = 2p_0 \\ 2p_1 = 2p_1 \\ 2p_2 + p_1 - p_0 = 2p_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow p_1 = p_0 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\ker(f - 2Id_{\mathbb{R}_2[X]}) = \text{vect}(1 + X, 1 + X + X^2)$$

On pose alors :

$$\mathcal{B} = (1 + X^2, 1 + X, 1 + X + X^2)$$

On a alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

b) On peut faire cette question de beaucoup de façons différentes.

[Tapez ici]

Méthode 1 : Avec les matrices

On a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f^k)$$

On pose :

$$\mathcal{B}_c(\mathbb{R}_2[X]) = (1, X, X^2)$$

On a alors :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

De plus on pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$A = PDP^{-1}$$

Donc

$$A^k = A \times A \times \dots \times A = \underbrace{PD P^{-1} \times PD P^{-1} \times \dots \times PD P^{-1}}_{=I_3} = PD^k P^{-1}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \text{mat}_{\mathcal{B}_c}(f^k) = A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2^k & 0 & -2^k \\ -2^k & 2^k & 2^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 1 - 2^k & 2^k - 1 & 2^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} f^k(a + bX + cX^2) &= a(1 + (1 - 2^k)X^2) + b(2^k - 1 + 2^kX + (2^k - 1)X^2) + 2^k cX^2 \\ &= a + (2^k - 1)b + 2^k bX + (a(1 - 2^k) + b(2^k - 1) + 2^k c)X^2 \end{aligned}$$

Méthode 2 : En décomposant $a + bX + cX^2$ dans la base $\mathcal{B} = (1 + X^2, 1 + X, 1 + X + X^2)$

On a :

$$\begin{cases} 1 = (1 + X^2) - (1 + X + X^2) + (1 + X) \\ X = (1 + X + X^2) - (1 + X^2) \\ X^2 = (1 + X + X^2) - (1 + X) \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} a + bX + cX^2 &= a((1 + X^2) - (1 + X + X^2) + (1 + X)) + b((1 + X + X^2) - (1 + X^2)) \\ &\quad + c((1 + X + X^2) - (1 + X)) \\ &= (1 + X^2)(a - b) + (1 + X + X^2)(-a + b + c) + (1 + X)(a - c) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, f^k(a + bX + cX^2) &= f^k((1 + X^2)(a - b) + (1 + X + X^2)(-a + b + c) + (1 + X)(a - c)) \\ &= (a - b)f^k(1 + X^2) + (-a + b + c)f^k(1 + X + X^2) + (a - c)f^k(1 + X) \\ &= (a - b)(1 + X^2) + (-a + b + c)2^k(1 + X + X^2) + (a - c)2^k(1 + X) \\ &= a + (2^k - 1)b + 2^k bX + (a(1 - 2^k) + b(2^k - 1) + 2^k c)X^2 \end{aligned}$$

[Tapez ici]

Méthode 3 : En effectuant la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$

On cherche $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_nX + b_n$$

Pour $X = 1$ on a :

$$1 = a_n + b_n$$

Pour $X = 2$ on a :

$$2^n = 2a_n + b_n$$

Ainsi on a :

$$a_n = 2^n - 1 \text{ et } b_n = 2 - 2^n$$

On a donc :

$$f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)Id_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])}$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} f^k(a + bX + cX^2) &= (2^k - 1)((a + b) + 2bX + (2c + b - a)X^2) + (2 - 2^k)(a + bX + cX^2) \\ &= a + (2^k - 1)b + 2^k bX + (a(1 - 2^k) + b(2^k - 1) + 2^k c)X^2 \end{aligned}$$

Problème 2 : Un produit infini

Dans ce problème on étudie la notion de produit infini, et on fait le lien avec la notion de somme infinie (série numérique) par le biais de la fonction logarithme népérien, lorsque cela est possible.

Soit $(a_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres complexes, avec n_0 un entier naturel. On pose, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$P_n = \prod_{k=n_0}^n a_k = a_{n_0} \times \dots \times a_n$$

La suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ est appelée la suite des produits partiels du produit infini

$$\left(\prod_{k \geq n_0} a_k \right)$$

On dit que le produit infini converge si la suite des produits partiels $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite **non nulle**, notée généralement P_∞ , appelée valeur produit du produit infini. Cette limite est alors notée :

$$\prod_{k=n_0}^{+\infty} a_k = P_\infty$$

Lorsque la suite des produits partiels $(P_n)_{n \geq n_0}$ diverge, ou converge vers 0, on dit que le produit infini $(\prod_{k \geq n_0} a_k)$ diverge.

Par abus, lorsque $(P_n)_{n \geq n_0}$ diverge vers 0, on peut cependant convenir que :

$$\prod_{k=n_0}^{+\infty} a_k = 0$$

Partie A : Préliminaire sur quatre exemples

1) Dans cette question on pose :

$$\forall n \geq 1, a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, \prod_{k=1}^n a_k = n + 1$$

b) En déduire que (P_n) diverge vers $+\infty$.

2) Dans cette question on pose :

$$\forall n \geq 1, a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Démontrer que (P_n) converge et précisez sa valeur

3) Montrer que :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = 1$$

4) On considère :

$$\forall N \geq 1, P_N = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)$$

a) Ecrire P_n à l'aide de factorielles.

b) En sachant que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

Déterminer la valeur de :

$$P_\infty = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right)$$

Partie B : Quelques propriétés

- 1) a) Etudier la convergence de $(P_n)_{n \geq n_0}$ lorsque $(a_n)_{n \geq n_0}$ s'annule.
b) En déduire que si $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge, alors la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ ne s'annule pas.
- 2) Montrer que si $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge, alors la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 1.

Partie C : Lien entre produit infini et somme infinie

Dans cette partie on considère une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de réels strictement positifs.

1) a) Montrer que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n) \right) \text{ converge}$$

b) Précisez dans ce cas le lien entre :

$$P_\infty = \prod_{n=n_0}^{+\infty} (a_n) \text{ et } S_\infty = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(a_n)$$

2) On suppose dans cette question que $(a_n)_{n \geq n_0}$ est à termes dans $]1; +\infty[$ et on pose pour tout entier $n \geq n_0$, $a_n = 1 + u_n$

a) Montrer que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

b) Réciproquement, montrer que :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge}$$

c) En déduire que la série :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right) \text{ diverge}$$

3) Dans cette question, on pose $(a_n)_{n \geq n_0}$ est à termes dans $]0; 1[$. On pose de même la suite (u_n) définie par $a_n = 1 + u_n$.

Montrer que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

Le but des questions 4) et 5) est de démontrer que les équivalences des questions 2) et 3) sont fausses si (a_n) est à termes dans $]0; +\infty[$ mais « oscille » autour de 1, c'est-à-dire que la suite admet une infinité de valeurs strictement inférieures 1, et une infinité de valeurs strictement plus grande que 1. Pour cela nous allons chercher deux contre-exemples.

4) Dans cette question on pose :

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \end{cases}$$

Le but de cette question est de montrer que $(\prod a_n)$ converge mais $(\sum u_n)$ diverge.

a) On pose :

$$\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b) En déduire que la série $(\sum u_n)$ diverge.

c) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, a_n > 0$$

d) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \ln(a_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right)$$

e) Conclure.

5) On revient au cas général ($\forall n \geq n_0, a_n > 0$ et $u_n = a_n - 1$). On suppose de plus dans cette question que :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

a) Montrer que :

$$\ln(1 + u_n) - u_n \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$$

b) En déduire que $(\prod a_n)$ est de même nature que $(\sum (u_n)^2)$.

c) Déterminer une suite (u_n) tel que :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge et } \left(\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n) \right) \text{ diverge}$$

Partie A :

1) a) On a :

$$\forall n \geq 1, \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

b) On a alors :

$$\lim \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = +\infty$$

Donc (P_n) diverge.

2) On a :

$$\forall n \geq 2, \prod_{k=2}^n a_k = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2} = \frac{n+1}{2(n)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

[Tapez ici]

Ainsi on a :

$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}$$

3) a) On a :

$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{(-1)^N}{N-1}\right) \times \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{N}\right)$$

Si N est pair, on a $N = 2p$ et :

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{2p} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) &= \left(1 + \frac{1}{1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{3}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{2p-1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2p}\right) \\ &= \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \left(\frac{2p}{2p-1}\right) \times \left(\frac{2p-1}{2p}\right) = 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Si $N = 2p + 1$ est impair :

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{2p+1} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) &= \left[\prod_{n=1}^{2p} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \right] \times \left(1 + \frac{1}{2p+1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2p+1}\right) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \rightarrow 1$$

4) a) On a :

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) &= \prod_{n=1}^N \frac{(2n-1)(2n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4^N (N!)^2} \left[\prod_{n=1}^N (2n-1) \right] \times \left[\prod_{n=1}^N (2n+1) \right] \\ &= \frac{1}{4^N (N!)^2} \times \left[\prod_{n=1}^N (2n-1) \times \frac{(2n)}{2n} \right] \times \left[\prod_{n=1}^N (2n+1) \times \frac{(2n)}{2n} \right] \\ &= \frac{1}{4^N (N!)^2} \times \frac{(2N)! \times (2N+1)!}{4^N (N!)^2} \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{(2N)! \times (2N+1)!}{(4^N)^2 (N!)^4} = \frac{((2N)!)^2 (2N+1)}{(4^N)^2 (N!)^4}$$

b) Or on sait que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Ainsi on a :

$$((2N)!)^2 \sim 2\pi(2N) \times \left(\frac{2N}{e}\right)^{4N}$$

Ainsi on a :

$$\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) \sim 2\pi \frac{2N(2N+1) \left(\frac{2N}{e}\right)^{4N}}{4^{2N} 4\pi^2 N^2 \left(\frac{N}{e}\right)^{4N}}$$

Or on a :

[Tapez ici]

$$2\pi \frac{2N(2N+1) \left(\frac{2N}{e}\right)^{4N}}{4^{2N} 4\pi^2 N^2 \left(\frac{N}{e}\right)^{4N}} = \frac{2N+1}{\pi N} \rightarrow \frac{2}{\pi}$$

Ainsi on a :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Partie B : Quelques propriétés

1) a) S'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $a_{n_1} = 0$, on a alors par intégrité de \mathbb{R} :

$$\forall n \geq n_1, P_n = \prod_{n=n_0}^{n_1} a_n = 0$$

Ainsi (P_n) diverge vers 0.

b) Par **contraposée**, si (P_n) converge, alors $\forall n \geq n_0, a_n \neq 0$.

2) Si (P_n) converge, d'après la question précédente on sait que (a_n) ne s'annule pas, donc (P_n) non plus, toujours par intégrité. Ainsi on a :

$$\forall n \geq n_0 + 1, \frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n$$

Or $P_n \rightarrow \ell \neq 0$, donc $P_{n-1} \rightarrow \ell$ donc par propriété des limites :

$$a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow 1$$

Partie C : Lien entre produit infini et somme infinie

Dans cette partie on considère une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de réels strictement positifs.

1) a) On a :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \exists \ell > 0 \text{ tel que } \prod_{n=n_0}^N a_n \rightarrow \ell \text{ car } (a_n)_{n \geq n_0} \text{ est à termes positifs}$$

On a donc par continuité de la fonction \ln :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \exists \ell > 0 \text{ tel que } \ln\left(\prod_{n=n_0}^N a_n\right) \rightarrow \ln(\ell)$$

Or on a :

$$\ln\left(\prod_{n=n_0}^N a_n\right) = \sum_{n=n_0}^N \ln(a_n)$$

Ainsi on a :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \exists \ell > 0 \text{ tel que } \sum_{n=n_0}^N \ln(a_n) \rightarrow \ln(\ell)$$

On a donc :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n)\right) \text{ converge}$$

b) D'après la question précédente on a :

$$S_\infty = \ln(P_\infty)$$

2) a) On a d'après la question précédente :

[Tapez ici]

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right)$$

De on sait d'après la question 2) de la partie B que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Rightarrow a_n \rightarrow 1$$

Ainsi on a :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

De plus on sait que :

$$\forall n \geq n_0, a_n = 1 + u_n > 1$$

Ainsi on a :

$$\forall n \geq n_0, u_n > 0$$

On a de plus on :

$$u_n \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(a_n) = \ln(1 + u_n) \sim u_n$$

Ainsi comme les termes sont positifs, on a le résultat de cours suivant :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right) \text{ et } \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ sont de même nature}$$

On en déduit donc que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

b) De la même façon on a :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0 \Rightarrow \ln(1 + u_n) \sim u_n$$

Or $\forall n \geq n_0, u_n > 0$ donc :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right) \text{ et } \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ sont de même nature}$$

Ainsi on a :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge}$$

La dernière implication provient de la question 1.

c) On pose :

$$u_n = \frac{1}{n}$$

On a vu précédemment dans la question 1) de la partie A que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \text{ diverge}$$

Par contraposée de l'implication,

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge}$$

On a :

[Tapez ici]

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right) \text{ diverge}$$

3) De la même façon que précédemment, on a :

$$\forall n \geq n_0, u_n < 0$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} &\Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n) \right) \text{ converge} \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right) \text{ converge} \end{aligned}$$

Or

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n \text{ car } a_n \rightarrow 1 \text{ donc } u_n \rightarrow 0$$

Et comme $\ln(1 + u_n)$ et u_n sont toujours négatifs on a :

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right) \text{ et } \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ sont de même nature}$$

On a donc :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(1 + u_n) \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

La réciproque ce fait comme précédemment.

4) a) On a :

$$\forall n \geq 1, S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < 0$$

Donc (S_{2n}) est décroissante.

De même on a :

$$\forall n \geq 1, S_{2n+1} - S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$$

Donc (S_{2n+1}) est croissante.

Enfin on a :

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$$

Donc les deux suites sont adjacentes, donc elles convergent, et elles convergent vers la même limite. Donc la suite (S_n) converge.

b) On sait que :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$$

Ainsi on a :

$$\frac{1}{2n} = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Si $(\sum u_n)$ converge, par stabilité par combinaison linéaire, comme la série $(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ converge, on aurait convergence de $(\sum \frac{1}{2n})$. Or on sait que cette série diverge. On en déduit donc que :

$$\left(\sum_{k \geq 1} \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k} \right) \right) \text{ diverge}$$

c) On a :

[Tapez ici]

$$\forall n \geq 1, a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$$

Ainsi pour tout n pair, $a_n > 0$.

Si $n = 2p + 1$, on a :

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= 1 + \frac{1}{2(2p+1)} - \frac{1}{\sqrt{2p+1}} = 1 + \frac{1 - 2\sqrt{2p+1}}{2(2p+1)} = \frac{2(2p+1) + 1 - 2\sqrt{2p+1}}{2(2p+1)} \\ &> \frac{2p+1 - \sqrt{2p+1}}{2p+1} \end{aligned}$$

Or on sait que :

$$\forall x \geq 1, x \geq \sqrt{x}$$

Ainsi on a :

$$\forall p \geq 0, a_{2p+1} > 0$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, a_n > 0$$

d) On sait que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \rightarrow 0$$

Or on sait que :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Ainsi on en déduit donc que :

$$\ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)^3 + o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)^3\right)$$

Or on a :

$$o\left(\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)^3\right) = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right) + o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$$

De plus on a :

$$\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{1.5}} + \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$$

Ainsi on en déduit que :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right) &= \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right) \end{aligned}$$

e) On sait d'après la partie A que si l'on a une suite à termes positifs :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n)\right) \text{ converge}$$

Or ici on a :

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$$

De plus on a d'après la question précédente 4) a) :

$$\left(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \text{ converge}$$

De plus d'après le critère de Riemann, si $v_n = o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$ alors $(\sum v_n)$ converge.

Ainsi on a :

[Tapez ici]

$$\left(\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n) \right) \text{ converge}$$

Donc on en déduit que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge}$$

On a donc bien trouvé un contre-exemple.

5) a) On a :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

Ainsi on a :

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2}(u_n)^2 + o((u_n)^2)$$

On a donc :

$$\ln(1 + u_n) - u_n = -\frac{1}{2}(u_n)^2 + o((u_n)^2) \sim -\frac{1}{2}(u_n)^2$$

b) On sait d'après la question 1 de cette partie que :

(Πa_n) et $(\Sigma \ln(1 + u_k))$ ont même nature

Or on a :

$$\left(\sum u_n \right) \text{ converge}$$

On en déduit donc que $u_n \rightarrow 0$

On a donc :

$$\ln(1 + u_n) = u_n - 2b_n \text{ avec } b_n \sim (u_n)^2$$

Ainsi on a par stabilité par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} \left(\sum u_n \right) \text{ converge} \\ \left(\sum b_n \right) \text{ converge} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\sum \ln(1 + u_n) \right) \text{ converge}$$

Ou bien :

$$\begin{cases} \left(\sum u_n \right) \text{ converge} \\ \left(\sum b_n \right) \text{ diverge} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\sum \ln(1 + u_n) \right) \text{ diverge}$$

Ainsi on a :

$$\left(\sum b_n \right) \text{ et } \left(\sum \ln(1 + u_n) \right) \text{ ont même nature}$$

On en déduit donc que (Πa_n) est de même nature que (Σb_n) donc comme ils sont de même signe et équivalent, même nature que $(\Sigma - 2(u_n)^2)$ donc que $(\Sigma (u_n)^2)$.

c) Il suffit de poser :

$$\forall n \geq 1, u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

On a vu précédemment que :

$$\left(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right) \text{ converge}$$

Ainsi d'après la question précédente :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n) \right) \text{ et } \left(\sum \frac{1}{n} \right) \text{ ont même nature}$$

On a donc un beau contre-exemple.

[Tapez ici]