

DS n°7

Exercice 1 : Dénombrement, les nombres de Stirling de deuxième espèce

Soit $E = (e_1, \dots, e_p)$ un ensemble à p éléments et $F = (f_1, \dots, f_n)$ un ensemble à n éléments, $p, n \in (\mathbb{N}^*)^2$. On définit le nombre de Stirling de deuxième espèce, noté $S_{p,n}$, le nombre de surjection qu'il existe entre E et F . Le but de cet exercice est de démontrer la formule suivante :

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

- 1) Que vaut $S_{p,n}$ si $p < n$.
- 2) Déterminer $S_{n,n}$.
- 3) Démontrer que :

$$S_{n+1,n} = n \times \frac{(n+1)!}{2}$$

- 4) On pose $u_{p,n}$ le nombre d'applications qu'il existe entre E et F .
 - a) Déterminer $u_{p,n}$.
 - b) En déduire que :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

- 5) On pose l'application linéaire suivante :

$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

- a) Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1} .
- b) On pose A la matrice de φ dans la base canonique. En expliquant pourquoi :

$$(S_{p,0} \quad S_{p,1} \quad \dots \quad S_{p,n})A = (u_{p,0} \quad u_{p,1} \quad \dots \quad u_{p,n}) \quad (\text{en posant } u_{p,0} = S_{p,0} = 0)$$

Démontrer que :

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 2 : Une intégrale

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx$$

Le but de ce problème est d'étudier la convergence de la suite (I_n) .

- 1) Calculer I_1 .
- 2) a) Montrer que :

$$\forall t \in [0; 1[, \ln(1-t) \leq -t$$

- b) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, I_n \leq 2$$

- 3) a) Montrer que :

$$\forall t \in [0; \frac{1}{2}[, \ln(1-t) \geq -t - t^2$$

- b) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \forall a \in [0; \frac{n}{2}[, \int_0^a \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx \geq 2e^{-\frac{a^2}{n}} (1 - e^{-\frac{a}{2}})$$

- c) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \forall a \in [0; \frac{n}{2}[, I_n \geq 2e^{-\frac{a^2}{n}} (1 - e^{-\frac{a}{2}})$$

- 4) a) Montrer que :

$$\forall n \geq 3, I_n \geq 2e^{-\frac{1}{n^3}} \left(1 - e^{-\frac{n^{\frac{1}{3}}}{2}} \right)$$

b) En déduire la convergence et la valeur de la limite de (I_n) .

Problème 1 : Un endomorphisme qui annule un polynôme scindé à racines simples

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $\dim(E) = n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la relation :

$$(\mathcal{R}): u^2 - 3u + 2Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

On dit alors que u annule le polynôme $P(X) = X^2 - 3X + 2$. Le but de la première partie est de démontrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E dans laquelle u est diagonale.

Partie A : Une base diagonale

1) Déterminer les racines du polynôme P .

Dans toute la suite de ce problème on pose $v = u - Id_E$ et $w = u - 2Id_E$.

2) Déterminer l'endomorphisme $v - w$ puis en déduire que $E = \text{Im}(v) + \text{Im}(w)$.

3) a) Démontrer que $E = \ker(v) \oplus \ker(w)$.

b) Comment peut-on obtenir une base de E dans laquelle la matrice u est diagonale ? On donnera la forme de la matrice de u dans la base considérée, en fonction de la dimension de $\ker(v)$ et de $\ker(w)$.

Partie B : Un exemple

On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ a + bX + cX^2 \mapsto (a + b) + 2bX + (2c + b - a)X^2 \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Montrer que f vérifie la relation (\mathcal{R}) .

4) a) En déduire une base \mathcal{B} de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

b) Déterminer $f^k(a + bX + cX^2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque : Vous démontrerez l'an prochain qu'un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé à racines simples.

Problème 2 : Un produit infini

Dans ce problème on étudie la notion de produit infini, et on fait le lien avec la notion de somme infinie (série numérique) par le biais de la fonction logarithme népérien, lorsque cela est possible.

Soit $(a_n)_{n \geq n_0}$ une suite de nombres complexes, avec n_0 un entier naturel. On pose, pour tout entier $n \geq n_0$:

$$P_n = \prod_{k=n_0}^n a_k = a_{n_0} \times \dots \times a_n$$

La suite $(P_n)_{n \geq n_0}$ est appelée la suite des produits partiels du produit infini

$$\left(\prod_{k \geq n_0} a_k \right)$$

On dit que le produit infini converge si la suite des produits partiels $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une limite **non nulle**, notée généralement P_∞ , appelée valeur produit du produit infini. Cette limite est alors notée :

$$\prod_{k=n_0}^{+\infty} a_k = P_\infty$$

Lorsque la suite des produits partiels $(P_n)_{n \geq n_0}$ diverge, ou converge vers 0, on dit que le produit infini $(\prod_{k \geq n_0} a_k)$ diverge.

Par abus, lorsque $(P_n)_{n \geq n_0}$ diverge vers 0, on peut cependant convenir que :

$$\prod_{k=n_0}^{+\infty} a_k = 0$$

Partie A : Préliminaire sur quatre exemples

1) Dans cette question on pose :

$$\forall n \geq 1, a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \prod_{k=1}^n a_k = n + 1$$

b) En déduire que (P_n) diverge vers $+\infty$.

2) Dans cette question on pose :

$$\forall n \geq 2, a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Démontrer que (P_n) converge et précisez sa valeur

3) Montrer que :

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 1$$

4) On considère :

$$\forall N \geq 1, P_N = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

a) Ecrire P_n à l'aide de factorielles.

b) En sachant que :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Déterminer la valeur de :

$$P_\infty = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$$

Partie B : Quelques propriétés

- 1) a) Etudier la convergence de $(P_n)_{n \geq n_0}$ lorsque $(a_n)_{n \geq n_0}$ s'annule.
b) En déduire que si $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge, alors la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ ne s'annule pas.
- 2) Montrer que si $(P_n)_{n \geq n_0}$ converge, alors la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 1.

Partie C : Lien entre produit infini et somme infinie

Dans cette partie on considère une suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ de réels strictement positifs.

1) a) Montrer que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} \ln(a_n)\right) \text{ converge}$$

b) Précisez dans ce cas le lien entre :

$$P_\infty = \prod_{n=n_0}^{+\infty} (a_n) \text{ et } S_\infty = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(a_n)$$

2) On suppose dans cette question que $(a_n)_{n \geq n_0}$ est à termes dans $]1; +\infty[$ et on pose pour tout entier $n \geq n_0, a_n = 1 + u_n$

a) Montrer que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

b) Réciproquement, montrer que :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge} \Rightarrow \left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge}$$

c) En déduire que la série :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \right) \text{ diverge}$$

3) Dans cette question, on pose $(a_n)_{n \geq n_0}$ est à termes dans $]0; 1[$. On pose de même la suite (u_n) définie par $a_n = 1 + u_n$.

Montrer que :

$$\left(\prod_{n \geq n_0} a_n \right) \text{ converge} \Leftrightarrow \left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

Le but des questions 4) et 5) est de démontrer que les équivalences des questions 2) et 3) sont fausses si (a_n) est à termes dans $]0; +\infty[$ mais « oscille » autour de 1, c'est-à-dire que la suite admet une infinité de valeurs strictement inférieures 1, et une infinité de valeurs strictement plus grande que 1. Pour cela nous allons chercher deux contre-exemples.

4) Dans cette question on pose :

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \\ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \end{cases}$$

Le but de cette question est de montrer que $(\prod a_n)$ converge mais $(\sum u_n)$ diverge.

a) On pose :

$$\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

b) En déduire que la série $(\sum u_n)$ diverge.

c) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, a_n > 0$$

d) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \ln(a_n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{1,5}}\right)$$

e) Conclure.

5) On revient au cas général ($\forall n \geq n_0, a_n > 0$ et $u_n = a_n - 1$). On suppose de plus dans cette question que :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge}$$

a) Montrer que :

$$\ln(1 + u_n) - u_n \sim -\frac{(u_n)^2}{2}$$

b) En déduire que $(\prod a_n)$ est de même nature que $(\sum (u_n)^2)$.

c) Déterminer une suite (u_n) tel que :

$$\left(\sum_{n \geq n_0} u_n \right) \text{ converge et } \left(\prod_{n \geq n_0} (1 + u_n) \right) \text{ diverge}$$