

Colle n°28
(Du 1 au 5 juin 2025)

Probabilité

- Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé (Ω, \mathbb{P})
- Probabilité conditionnelle
- Evènements indépendants

Déterminant

- Déterminant d'une famille de vecteurs
- Déterminant d'une matrice carrée
- Déterminant d'un endomorphisme

Démo de cours

Propriété (Formule des probabilités totales) I.c.1: Soit A_1, \dots, A_n une partition de l'univers d'une expérience aléatoire. Soit B un évènement de cette expérience. On a alors :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

Propriété II.a.1 : On a les équivalences suivantes :

$$A \cup B \Leftrightarrow A \cup \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \cup B \Leftrightarrow \bar{A} \cup \bar{B}$$

Propriété I.b.1 (Opérations sur le déterminant) : On a :

1) Si $(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F}$ contient O_E alors son déterminant est nul.

$$O_E \in \mathcal{F} \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$

2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = -\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, f_n))$$

3) Les transvections ne changent pas le déterminant :

$$\det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i + \lambda \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) = \det_{\mathcal{B}}((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)) \quad (i \neq j)$$

Propriété II.b.1 : On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A) = \det(A^T)$$

Exercice 12 :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$$

Exercices types

Exercice 7 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Application II.c.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 14 : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On pose :

$$u_A: \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{cases}$$

- a) Montrer que u est un endomorphisme.
- b) Montrer que $\det(u_A) = (\det(A))^2$.