Chapitre 29 : Produit scalaire et espace euclidien
Partie C : Projection orthogonale

Dans toute cette partie $(E, \langle . ; . \rangle)$ désigne un espace euclidien préhilbertien réel.

I) Un projecteur bien connu

a) Somme directe et projecteur orthogonal

Propriété I.a.1 : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On a alors :
$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Définition : $F^{\perp}$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F.

Application I.a.2 : Soient $(E, \langle . ; . \rangle)$ un espace euclidien et F un sev de E. On a alors :
$$(1)\ \dim(F^{\perp}) = \dim(E) - \dim(F)$$

Application I.a.3 : On pose :
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; x + y - 2z + t = 0 \right\}$$
Déterminer $F^{\perp}$.

Définition : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle projecteur orthogonal de F, notée p_F, la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Exemple I.a.4 : On pose :
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; x + 3y - 2z = 0 \right\}$$
a) Déterminer p_F.
b) Donner sa matrice dans la base canonique.

b) Avec une base orthonormée

Propriété I.b.1 : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F. On a alors :
$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x ; e_k \rangle e_k$$

Application I.b.2 : On pose :
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 ; \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \right\}$$
a) Déterminer une base orthonormale de F.
b) Déterminer la matrice, dans la base canonique, de $p_F(x)$.

Application I.b.3 **:** Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :
$$\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x) ; y \rangle = \langle x ; p(y) \rangle$$

c) Symétrie

Définition : Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle symétrie orthogonale, notée s_F, la symétrie par rapport à F dans la direction de $F^{\perp}$.

Exemple I.c.3 : On pose :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x + 3y - 2z = 0 \right\}$$

a) Déterminer s_F.
b) Donner sa matrice dans la base canonique.

Application I.c.4 : Soit $(E, \langle . ; . \rangle)$ un espace euclidien et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Montrer que s est une symétrie orthogonale si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle s(x); y \rangle = \langle x; s(y) \rangle$$

Définition : Soit $(E, \langle . ; . \rangle)$ un espace euclidien. On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

II) Distance par rapport à un sev

a) Une définition intuitive

Définition : Soient F un sev de E de dimension finie et $x \in E$. On appelle la distance de x à F, notée $d(x, F)$, le minimum des distances de x à y, avec $y \in F$:

$$d(x, F) = \min\{\|x - y\|, y \in F\}$$

Exemple II.a.1 : Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}$. On pose $e = (2; 7)$. Déterminer $d(e, F)$.

Propriété II.a.2 : Soit F un sev de E de dimension finie. Pour tout $x \in E$, la projection orthogonale $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise la plus courte distance de x à F :

$$d(x, F) = \min\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|$$

De plus si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F, on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x; e_k \rangle|^2}$$

Application II.a.3 : Calculer la distance de $v = (2; 6; -1)$ au plan vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; x + 3y - 2z = 0 \right\}$

Application II.a.4 **:** Déterminer :

$$I = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$$

b) Inégalité de Bessel

Propriété II.b.1 : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace euclidien $(E; \langle . ; . \rangle)$. On a alors :

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|$$

De plus si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F, on a :

$$\forall x \in E, \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\langle x; e_k \rangle|^2} \leq \|x\|$$