Fiche exercices chapitre 29
Espace préhilbertien réel

Partie A : Le produit scalaire

Exercice A.1 : On pose :

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (\mathrm{f},\mathrm{g}) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-\mathrm{t}^2)\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{g}(\mathrm{t})\mathrm{dt} \end{cases}$$

Montrer que Φ est un produit scalaire.

Exercice A.2 : On considère le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ et on pose $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ et :

$$< x,y > = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$$

a) Montrer que $<.,.>$ définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

b) Représenter la boule unité :

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ tel\ que\ \|x\| \leq 1\}$$

Exercice A.3 : Soit $(f,g) \in \left(\mathcal{C}^0([0;1])\right)^2$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\, g(t)dt \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\, dt}\sqrt{\int_0^1 g^2(t)dt}$$

Exercice A.4 : On considère l'espace $E = \mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall (f,g) \in \left(\mathcal{C}^1([0;1])\right)^2, < f,g > = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$$

a) Montrer que $<.,.>$ définie un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.

b) Etablir que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0;1]), \left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leq \left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2dt\right)$$

Exercice A.5 : On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose :

$$\forall (M,N) \in E^2, < M,N > = Tr(M^TN)$$

a) Montrer que $<.,.>$ définie un produit scalaire sur E.

b) En déduire que :

$$\forall M \in E, \left(\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}\right)^2 \leq n \times \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$$

Exercice A.6 : Montrer que $< \mathrm{P},\mathrm{Q} > = \mathrm{P}'(0)\mathrm{Q}'(0) + \mathrm{P}'(1)\mathrm{Q}'(1) + \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0)$ définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

Partie B : Orthogonalité

Exercice B.1 : Dans $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, on pose :

$$V_1 = (1,2,-1,1), V_2 = (0,3,1,-1), F = Vect(V_1,V_2)$$

Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^{\perp}$.

Exercice B.2 : On pose $u_1 = (0,1,1,1), u_2 = (1,0,1,1), u_3 = (1,1,0,1)\ et\ u_4 = (1,1,1,0)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) forme une base de $\mathbb{R}^4$ puis orthonormalisez-a.

Exercice B.3 : Déterminer l'orthogonalité des fonctions paires pour le produit scalaire :

$$< f, g > = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Sur l'ensemble $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.

Exercice B.4 : Déterminer l'orthogonal de $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \mathrm{P}(1) = 0\}$ pour le produit scalaire

$$< \mathrm{P}, \mathrm{Q} > = \sum_{\mathrm{i}=0}^{2} \mathrm{P}(\mathrm{i})\mathrm{Q}(\mathrm{i})$$

Exercice B.5 :On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \dots, e_p)$ de E espace euclidien de dimension n, vérifiant la relation suivante :

$$\forall e \in E, \|e\|^2 = \sum_{k=1}^{p} < e_k, e >^2$$

Montrer que $p = n$.
Indice : On pourra montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormale de E.

Exercice B.6 : On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice B.7 : $E = \mathbb{R}^3$ euclidien muni du produit scalaire usuel. Etudier les endomorphismes de matrice A_i dans la base canonique suivants :

$$A_1 = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice B.8 : Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit :

$$< P, Q > = \int_{0}^{1} P(t)Q(t)dt$$

a) Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire.
b) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
c) Calculer :

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{0}^{1} (t^2 - at - b)^2 dt$$

Exercice B.9 : Sur $\mathbb{R}_n[X]$ on définit :

$$< P, Q > = \int_{0}^{1} P(t)Q(t)dt$$

De même on pose :

$$\forall p \in [\![0; n]\!], L_p(X) = \frac{d^p}{dX^p}(X^p(X-1)^p)$$

a) Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire.
b) Montrer que $\forall p \in [\![0;n]\!], L_p \in \mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
c) Calculer $< L_p, L_q >$ pour $(p,q) \in [\![0;n]\!]^2, p \neq q$. En déduire que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire.
d) Déterminer une BON de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice B.10 : Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E, et soit A une partie de E.
a)Montrer que :

$$A^{\perp} = vect(A)^{\perp}; F^{\perp} \cap G^{\perp} = (F+G)^{\perp}; F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$$

b) Montrer que $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$ lorsque E est de dimension finie.

Exercice B.11 (Théorème de représentation de Riesz) : On considère E un espace euclidien.
a) Montrer le théorème suivant :
Théorème de représentation de Riesz : Ainsi on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists!\, v \in E \; tel \; que \; \forall e \in E, \varphi(e) = < v, e >$$

b) Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si c'est l'orthogonal d'un vecteur non nul.
c) Montrer que deux hyperplans sont identiques si et seulement s'ils sont orthogonaux à une même droite vectorielle.

Exercice B.12 : Soit $\mathrm{F} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \in \mathbb{R}^3, \mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 0\}$. Déterminer une base orthonormée de F puis le projeté orthogonale de $\mathrm{u} = (1,2,3)$ sur F.