

Fiche d'exercices 28 : Variables aléatoires

Partie A : Loïs des variables aléatoires

Exercice A.1 : Soit $N \geq 2$. On lance N fois une pièce de monnaie équilibrée. On pose X la variable aléatoire donnant le numéro du jet pour lequel on obtient pile pour la première fois, et renvoie 0 si l'on obtient jamais pile. Déterminer la loi de X .

Exercice A.2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice A.3 : n amis vont au cinéma et choisissent entre 3 films F_1, F_2 et F_3 . Les choix sont indépendants et équilibrés entre les films. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note X_i le nombre de personnes choisissant le film F_i .

a) Déterminer la loi de X_i , pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

b) Soit Y le nombre de films ayant reçu au moins un choix. Déterminer la loi de Y .

Exercice A.4 : Une urne contient deux boules blanches et sept boules noires. On tire successivement et avec remise 6 fois dans l'urne. On pose B_6 la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires obtenues. Déterminer la probabilité de $\{B_6\} = 4$.

Exercice A.5 : On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements. On pose X le nombre d'ampoules défectueuses.

1) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 1)$

2) Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$

3) Calculer $\mathbb{P}(X = 1)$

Partie B : Couple de variables aléatoires

Exercice B.1 : Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi conjointe est donnée par :

$X \backslash Y$	a_1	a_2	a_3
b_1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
b_2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	α

De plus on a $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$ dès que $i \neq j$.

1) Que vaut α ? Déterminer les lois marginales de X et de Y .

2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice B.2 : On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un roi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; Y = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une dame} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ; Z = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un coeur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples (X, Y) et (X, Z) .

b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice B.3 : Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1; 1\}$ prenant toutes les deux la valeur 1 avec une probabilité $\frac{2}{3}$.

Soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$X = U, Y = \begin{cases} V & \text{si } U = 1 \\ -V & \text{si } U = -1 \end{cases}$$

- a) Déterminer la loi du couple de variables aléatoires (X, Y) . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
 b) Les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice B.4 : Soient $p \in]0; 1[$, $(n, m) \in \mathbb{N}^*$. On se donne X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement.

- a) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0; m+n \rrbracket, \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

- b) En déduire que $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$

Exercice B.5 : N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n , avec $n \geq 2$. Soit X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i .

- a) Déterminer la loi de X_i .
 b) Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes ?

Partie C : Espérance, variance et covariance

Exercice C.1 : L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi les trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

- 1) Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
 a) Les trois sujets tirés.
 b) Exactement deux sujets sur les trois sujets.
 c) Aucun des trois sujets.
 2) Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice C.2 : On lance 10 fois de suite un dé 6 parfait.

- a) On appelle X le nombre de fois qu'on a obtenu une face portant un numéro pair. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance.
 b) On appelle Y la somme de tous les points obtenus. Trouver l'espérance de Y .
 c) On appelle Z le nombre de faces différentes qui sont apparues. Calculer l'espérance de Z . Dans le cas où on lance le dé 3 fois (au lieu de 10), écrire explicitement la loi de probabilité de Z , et retrouver directement la valeur de $E(Z)$.

Exercice C.3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, soit r tel que $0 \leq r \leq n$. Un placard contient n paires de chaussures. On tire, au hasard, $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.

Les paires du placard sont numérotées de 1 à n . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i -ième paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

- a) Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer la loi et l'espérance de X_i .
 b) Déterminer l'espérance de X .

Exercice C.4 : Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que, chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par $\alpha > 1$ avec la probabilité $p \in]0, 1[$, ou par $\beta \in]0, 1[$ avec probabilité $q = 1 - p$. On suppose que ces variations journalières sont indépendantes.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On note S_n la variable aléatoire égale à la valeur de l'action le jour n .

- a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n .
 b) On suppose $\beta = \frac{1}{\alpha}$. Quelle doit être la valeur de p pour que $E(S_n) = 1$?

c) On suppose $\beta = 1 - h$ et $\alpha = 1 + h$ pour $h \in]0,1[$. Quelle doit être la valeur de p pour que $\mathbb{E}(S_n) = 1$? Que vaut alors $\mathbb{V}(S_n)$?

Exercice C.5 : On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n .

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.

b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_k) + 1$.

c) Déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $k \rightarrow +\infty$.

Exercice C.6 : Soit $N \geq 2$. Une urne contient $N + 1$ boules numérotées de 0 à N . On tire avec remise une boule. On considère les variables aléatoires suivantes : $X_1 = 1$, et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.

a) Déterminer la loi de X_i .

b) Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?

Exercice C.7 : Soient $(a, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On considère $N = a \times n$ clients qui s'approvisionnent chez n fournisseurs. Chaque client choisit un fournisseur au hasard. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i le nombre de clients du fournisseur i et Y le nombre de fournisseurs n'ayant aucun client.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i .

2. Que vaut $X_1 + \dots + X_n$? En déduire $\mathbb{E}(X_i X_j)$ et $\text{Cov}(X_i, X_j)$ pour i, j .

3. Soit β_i la variable aléatoire indicatrice de l'évènement : « le fournisseur i n'a pas de client ». Exprimer Y en fonction des β_i .

Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

4. Calculer $\text{Cov}(\beta_i, \beta_j)$.

5. Déterminer la variance de Y .

Exercice C8 : Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p . On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\frac{X_n}{n}$ approche p .

1) Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?

2) Démontrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

3) En déduire une condition sur n pour que $\frac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice C9 : 1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n, p)$ et soit $\epsilon > 0$. Démontrer que :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

2) **Application :** On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $1/6$ d'au plus $1/100$?