

Colle n°29
(Du 18 au 12 juin)

Déterminant

- Déterminant d'une famille de vecteurs
- Déterminant d'une matrice carrée
- Déterminant d'un endomorphisme

Variables aléatoires

- Définition
- Lois uniforme, binomiale, Bernoulli
- Lois conjointe et marginales d'un couple X et Y
- Indépendance de deux variables aléatoires
- Espérance, variance

Démo de cours

_ Espérance et variance de la **loi uniforme, de la loi binomiale.**

_ Inégalité de **Markov et de Bienaymé-Tchevbychev**

Propriété III.b.4 : Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires sur un même espace probabilisé indépendantes. Alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$$

Propriété I.b.1 (Opérations sur le déterminant) : On a :

1) Si $(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{F}$ contient O_E alors son déterminant est nul.

$$O_E \in \mathcal{F} \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$$

2) Si on échange deux vecteurs, le déterminant change de signe :

$$\det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)\right) = -\det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, f_n)\right)$$

3) Les transvections ne changent pas le déterminant :

$$\det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots, \mathbf{f}_i + \lambda \mathbf{f}_j, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)\right) = \det_{\mathcal{B}}\left((f_1, \dots, \mathbf{f}_i, \dots, \mathbf{f}_j, \dots, f_n)\right) \quad (i \neq j)$$

Propriété II.b.1 : On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det(A) = \det(A^T)$$

Exercice 12 :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$$

Exercices types

Exercice 12 (Déterminant de Vandermonde) : Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i)$$

Exercice 7 : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \cos(a_1 + a_1) & \cos(a_1 + a_2) & \dots & \cos(a_1 + a_n) \\ \cos(a_2 + a_1) & \cos(a_2 + a_2) & \dots & \cos(a_2 + a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(a_n + a_1) & \cos(a_n + a_2) & & \cos(a_n + a_n) \end{vmatrix} = 0$$

Application II.c.3 : Calculer le déterminant suivant :

$$d_n = \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$$

Exercice C.5 : On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n .

- Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
- En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right) \mathbb{E}(X_k) + 1$.
- Déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $k \rightarrow +\infty$.

Exercice A.1 : Soit $N \geq 2$. On lance N fois une pièce de monnaie équilibrée. On pose X la variable aléatoire donnant le numéro du jet pour lequel on obtient pile pour la première fois, et renvoie 0 si l'on obtient jamais pile. Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice C.2 : On lance 10 fois de suite un dé 6 parfait.

- On appelle X le nombre de fois qu'on a obtenu une face portant un numéro pair. Quelle est la loi de X ? Déterminer son espérance.
- On appelle Y la somme de tous les points obtenus. Trouver l'espérance de Y .
- On appelle Z le nombre de faces différentes qui sont apparues. Calculer l'espérance de Z . Dans le cas où on lance le dé 3 fois (au lieu de 10), écrire explicitement la loi de probabilité de Z , et retrouver directement la valeur de $E(Z)$.