

Colle n°30
(Du 15 au 19 juin)

Variables aléatoires

- Définition
- Lois uniforme, binomiale, Bernoulli
- Lois conjointe et marginales d'un couple X et Y
- Indépendance de deux variables aléatoires
- Espérance, variance et covariance

Espaces préhilbertien réel

- Définition du produit scalaire comme une application bilinéaire, symétrique définie positive.
- Vecteurs orthogonaux, espaces orthogonaux
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Démo de cours

_ Espérance et variance de la **loi uniforme, de la loi binomiale**.

_ Inégalité de **Markov et de Bienaymé-Tchevbychev**

Propriété III.b.4 : Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires sur un même espace probabilisé. On a alors :

$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Démontrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^n P(i)Q(i) \end{cases}$$

Propriété II.a.2 : Soit F un sev de E de dimension finie. Pour tout $x \in E$, la projection orthogonale $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise la plus courte distance de x à F :

$$d(x, F) = \min\{\|x - y\|, y \in F\} = \|x - p_F(x)\|$$

De plus si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F , on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2}$$

Propriété II.c.1 : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien rapporté à une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$. On a alors :

$$(1) \forall (x, y) \in E^n, \begin{cases} x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \\ y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n \end{cases} \Rightarrow \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$(2) \forall x \in E, x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \Rightarrow \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$(3) \forall x \in E, x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$$

Exercices types

Exercice B.4 : Soient $p \in]0; 1[$, $(n, m) \in \mathbb{N}^*$. On se donne X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement.

a) Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0; m+n \rrbracket, \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

b) En déduire que $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m, p)$

c) Retrouver ce résultat avec des sommes de variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli.

Exercice B.6 : Soit $N \geq 2$. Une urne contient $N+1$ boules numérotées de 0 à N . On tire avec remise une boule. On considère les variables aléatoires suivantes : $X_1 = 1$, et pour $i \geq 2$, $X_i = 1$ si le numéro tiré au tirage i n'est pas sorti dans les tirages précédents, $X_i = 0$ sinon.

a) Déterminer la loi de X_i .

b) Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes, pour $i \neq j$?

Exercice C.5 : On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n .

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.

b) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{b}\right) \mathbb{E}(X_k) + 1$.

c) Déterminer $\mathbb{E}(X_k)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $k \rightarrow +\infty$.

Exercice A.1 : On pose :

$$\Phi: \begin{cases} \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 (1-t^2)f(t)g(t)dt \end{cases}$$

Montrer que Φ est un produit scalaire.

$$\forall ((x_i)_{1 \leq i \leq n}) \in (]0; 1])^n, \sum_{k=1}^n x_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$