Correction DS n°8

Problème 1 : Comptabilité de changement

On lance indéfiniment une pièce donnant “Pile” avec la probabilité p et “Face” avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0,1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants. Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k - ième$ lancer est un changement s’il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)$-ième lancer. On note P_k $(resp. F_k)$ l’événement : “on obtient Pile (resp. Face) au k-ième lancer”. Pour ne pas surcharger l’écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie A : Pour $n = 4$

1) Déterminer $X_4(P_1P_2F_3F_4)$.
2) a) Déterminer les issues qui donnent $\{X_4 = 0\}$.
   b) En déduire que :
$$\mathbb{P}(X_4 = 0) = p^4 + q^4$$
3) a) Déterminer la loi de X_4.
   b) Montrer que $\mathbb{E}(X_4) = 6pq$.

Partie B : Etude du cas $p \neq q$

1) Exprimer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ en fonction de $p, q\ et\ n$.
2) Démontrer que :
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}(q^{n-1} - p^{n-1})$$
3) Exprimer $\mathbb{P}(X_n = n - 1)$ en fonction de $p, q\ et\ n$.
(On pourra distinguer n pair et n impair).
4) a) Pour tout entier naturel $k \in [\![2;n]\!]$, on pose :
$$\forall k \in [\![2;n]\!], Z_k = \begin{cases} 1\ si\ changement\ au\ k - ième\ lancer \\ 0\ sinon \end{cases}$$
Ecrire X_n à l’aide des $(Z_k)_{k\in[\![2;n]\!]}$ et en déduire l’espérance de X_n.
   b) Prouver que les Z_k ne sont pas indépendants.
5) Dans cette question on suppose que $p = q = 0{,}5$. Déterminer alors la loi de X_n.

Partie A :

1) $X_4(P_1P_2F_3F_4) = 1$ car on a eu un seul changement.
2) a) On a :
$$\boldsymbol{\{X_4 = 0\} = \{P_1P_2P_3P_4; F_1F_2F_3F_4\}}$$
   b) On a :
$$\boldsymbol{\mathbb{P}(X_4 = 0) = \mathbb{P}(\{P_1P_2P_3P_4; F_1F_2F_3F_4\}) = \mathbb{P}(\{P_1P_2P_3P_4\}) + \mathbb{P}(\{F_1F_2F_3F_4\}) = p^4 + q^4}$$
3) a) On a :
$$\mathbb{P}(X_4 = 1) = \mathbb{P}(X_4 = 1 \cap P_1) + \mathbb{P}(X_4 = 1 \cap F_1)$$
$$= p^3q + p^2q^2 + pq^3 + q^3p + q^2p^2 + qp^3 = 2p^3q + 2p^2q^2 + 2pq^3$$
$$\mathbb{P}(X_4 = 2) = \mathbb{P}(X_4 = 2 \cap P_1) + \mathbb{P}(X_4 = 2 \cap F_1) = 2p^3q + 2q^3p + 2p^2q^2$$
$$\mathbb{P}(X_4 = 3) = \mathbb{P}(X_4 = 3 \cap P_1) + \mathbb{P}(X_4 = 3 \cap F_1) = 2p^2q^2$$
   b) On a :
$$\mathbb{E}(X_4) = 2p^3q + 2p^2q^2 + 2pq^3 + 2(2p^3q + 2q^3p + 2p^2q^2) + 3(2p^2q^2)$$
$$\boldsymbol{= 6pq(p^2 + 2pq + q^2) = 6pq(p+q)^2 = 6pq}$$

Partie B :

1) De même que précédemment on a :
$$\boldsymbol{\mathbb{P}(X_n = 0) = p^n + q^n}$$
2) On a :
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1 \cap P_1) + \mathbb{P}(X_n = 1 \cap F_1)$$

De plus on a :

$$\{X_n = 1 \cap P_1\} = \bigcup_{i=2}^{n} \left\{ \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} P_i \right) \cap \left(\bigcap_{k=i}^{n} F_i \right) \right\}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(X_n = 1 \cap P_1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=2}^{n} \left\{ \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} P_i \right) \cap \left(\bigcap_{k=i}^{n} F_i \right) \right\} \right)$$
$$= \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}\left(\left\{ \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} P_i \right) \cap \left(\bigcap_{k=i}^{n} F_i \right) \right\} \right) = \sum_{i=2}^{n} p^{i-1} q^{n-i+1}$$

De la même façon on a :

$$\mathbb{P}(X_n = 1 \cap F_1) = \sum_{i=2}^{n} q^{i-1} p^{n-i+1}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{i=2}^{n} p^{i-1} q^{n-i+1} + \sum_{i=2}^{n} q^{i-1} p^{n-i+1}$$
$$= 2pq \left(\sum_{k=0}^{n-2} p^k q^{n-k} \right)$$

Or on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+1} - p^{n+1} = (q-p) \left(\sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} \right)$$

Ainsi on en déduit donc car $p \neq q$ que :

$$\left(\sum_{k=0}^{n-2} p^k q^{n-k} \right) = \frac{(q^{n-1} - p^{n-1})}{q-p}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}(q^{n-1} - p^{n-1})}$$

3) $\{X_n = n-1\}$ signifie que l'on a eu changement à chaque lancer.
On a donc :
<u>1^er^ cas</u> : Si a est pair, $n = 2a$

$$\mathbb{P}(X_n = n-1) = 2p^a q^a$$

<u>2^ième^ cas</u> : Si n est impair, $n = 2a+1$
On a :

$$\boldsymbol{\mathbb{P}(X_n = n-1) = p^a q^{a+1} + q^a p^{a+1} = p^a q^a (p+q) = p^a q^a}$$

4) a) On a :

$$X_n = \sum_{k=2}^{n} Z_k$$

On en déduit par linéarité de l'espérance que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{E}(Z_k)$$

Or d'après les probabilités totales on a :

$$\mathbb{E}(Z_k) = \mathbb{P}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(Z_k = 1 \cap P_{k-1}) + \mathbb{P}(Z_k = 1 \cap P_{k-1}) = 2pq$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\mathbb{E}(X_n) = 2(n-1)pq}$$

b) On a :

$$\mathbb{P}(Z_2 = 1 \cap Z_3 = 1) = \mathbb{P}(Z_2 = 1 \cap Z_3 = 1 \cap P_1) + \mathbb{P}(Z_2 = 1 \cap Z_3 = 1 \cap F_1)$$
$$= pqp + qpq = pq$$

De plus on a :

$$\mathbb{P}(Z_2 = 1) \times \mathbb{P}(Z_3 = 1) = 4p^2q^2 = pq(4pq)$$

Or on a :

$$pq = pq(4pq) \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ ou \\ p = 0 \\ ou \\ 4p(1-p) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \ (car\ p \in]0;1[\ \ )$$

Or on sait que $p \neq \frac{1}{2}$ donc on a :

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{Z_2} = \mathbf{1}) \times \mathbb{P}(\boldsymbol{Z_3} = \mathbf{1}) \neq \mathbb{P}(\boldsymbol{Z_2} = \mathbf{1} \cap \boldsymbol{Z_3} = \mathbf{1})$$

Les évènements sont **dépendants**.

5) Si $p = q = 0{,}5$ on a alors affaire à des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Ainsi X_n suit une loi binomiale de paramètres $n-1$ et $0{,}5$.

Problème 2 : Les polynômes de Bernstein

Pour tout $n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!]$, on note $P_{k,n}$ le polynôme :

$$P_{k,n}(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

La famille $\mathcal{F}_n = \left(P_{0,n}, \dots, P_{n,n}\right)$ est appelée la famille des polynômes de Bernstein de degré n.

Partie A : Un peu d'algèbre linéaire

Dans toute cette partie on pose :

$$\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto \varphi_n(P)(X) = nXP(X) + X(1-X)P'(X) \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \end{cases}$$

1) $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$ −espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de E. Montrer que :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{K}^*)^n, vect(e_1, \dots, e_n) = vect(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$$

2) a) Démontrer que $\mathcal{F}_n = \left(P_{0,n}, \dots, P_{n,n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire que B_n est un automorphisme.

3) a) Démontrer que φ_n est un endomorphisme.

b) Démontrer que :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \varphi_n\left(P_{k,n}\right) = kP_{k,n}$$

c) En déduire la matrice de φ_n dans la base $\mathcal{F}_n$.

d) Calculer $\det(\varphi_n)$ et en déduire si φ_n est bijective ou non.

Partie B : Le théorème de Weierstrass

Le but de cette partie est de démontrer un résultat immense en analyse, le théorème de Weierstrass.

Théorème de Weierstrass : Toute fonction continue sur un segment peut être approchée uniformément par des fonctions polynômiales.

On peut le paraphraser par : quel que soit la fonction continue sur $[a,b]$ que l'on prend et quel que soit le nombre strictement positif ϵ que l'on prend, il existe une fonction polynômiale P_f telle que la valeur maximale de $\left|P_f(x) - f(x)\right|$ sera toujours plus petite que ϵ.

Théorème de Weierstrass (Avec les quantificateurs) : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall f \in \mathcal{C}^0([a,b]), \forall \epsilon > 0, \exists P_f \in \mathbb{R}[X]\ tel\ que$:

$$\sup_{x \in [a,b]} \left|f(x) - P_f(x)\right| \leq \epsilon$$

Nous allons le démontrer dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Dans toute la suite de ce problème on pose $f \in \mathcal{C}^1[0;1]$. De même on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \mathcal{B}_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$K = \sup_{x\in[0;1]} |f'(x)| = \|f'\|_\infty$$

1) a) Pourquoi K existe-t-il ?

b) Démontrer que f est $K - lipschitizienne$.

2) a) Démontrer que :

$$\forall x \in [0;1], \mathcal{B}_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

b) En déduire que :

$$\exists K > 0 \text{ } tel\ que, \forall x \in [0;1], |\mathcal{B}_n(f)(x) - f(x)| \leq K\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

3) Soit Y une variable aléatoire réelle sur un univers fini.

a) Montrer que :

$$\mathbb{E}[|Y|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

Puis en déduire que :

$$\mathbb{E}[|Y|] \leq \sqrt{Var(Y) + \mathbb{E}[Y]^2}$$

b) On suppose à présent que Y suit une loi binomiale de paramètres n et x. Démontrer que :

$$\mathbb{E}\left[\left|\frac{Y}{n} - x\right|\right] = \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

c) En déduire que :

$$\forall x \in [0;1], \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$$

d) En déduire que :

$$\forall x \in [0;1], |\mathcal{B}_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$$

e) Démontrer le théorème de Weierstrass dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

4) Si $f = cos$ restreinte sur $[0;1]$, déterminer un polynôme P tel que :

$$\forall x \in [0,1], |P(x) - f(x)| \leq 10^{-2}$$

Partie C : Une autre démonstration des sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$. On pose la suite de fonctions polynômiale $\left(B_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie précédemment.

1) Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B_n(f)(x)dx = \int_0^1 f(t)dt$$

2) a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n-1]\!], \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{(n-k)}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}dx$$

b) En déduire que :

$$\int_0^1 B_n(f)(x)dx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

c) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt$$

d) Retrouver le résultat précédent à l'aide des sommes de Riemann.

Partie A : Un peu d'algèbre linéaire

1) a) On raisonne par double-inclusion.
Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in(\mathbb{K}^*)^n$.
1ère inclusion : $vect(e_1,\dots,e_n)\subset vect(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)$

Soit $e\in\ vect(e_1,\dots,e_n)$. Ainsi :

$$\exists(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n\ tel\ que\ e=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,e_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mu_i}{\lambda_i}\right)(\lambda_ie_i)\ car\ \lambda_i\neq 0$$

Donc $e\in\ vect(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)$.
2ième inclusion : $vect(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)\subset vect(e_1,\dots,e_n)$
Soit $e\in\ vect(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)$. On a alors :

$$\exists(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{K}^n\ tel\ que\ e=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\,(\lambda_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}(\mu_i\lambda_i)e_i$$

Donc $e\in\ vect(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)$
Ainsi on a :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in(\mathbb{K}^*)^n, vect(e_1,\dots,e_n)=vect(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)$$

2) a) On peut le faire de beaucoup de façons différentes.
La plus simple ici est d'utiliser la question précédente.
On sait que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall\ k\in[\![0;n]\!],\binom{n}{k}\neq 0$$

Ainsi d'après la question précédente on a :

$$vect(P_{0,n},\dots,P_{n,n})=vect\left(\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\leq k\leq n}\right)$$

On a :

$$\forall k\in[\![0;n]\!],P_{k,n}(X)=X^k(1-X)^{n-k}=X^k+\sum_{i=k+1}^{n}\binom{n}{i}(-X)^i$$

Ainsi on a :

$$mat_{(1,X,\dots,X^n)}\left((P_{0,n},\dots,P_{n,n})\right)=\begin{pmatrix}1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (*) & & 1\end{pmatrix}=A$$

$$A\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

De plus elle est triangulaire inférieure et :

$$\det(A)=1\neq 0$$

Ainsi $A\in GL_{n+1}(\mathbb{R})$ et donc $(P_{0,n},\dots,P_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boldsymbol{\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in(\mathbb{K}^*)^n, vect(e_1,\dots,e_n)=vect(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)}$$

b) Montrons que B_n est bijective et linéaire.

- $B_n\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

$$\forall(\lambda,P,Q)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_n[X]^2,B_n(\lambda P+Q)(X)=\sum_{k=0}^{n}(\lambda P+Q)\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\lambda P\left(\frac{k}{n}\right)+Q\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}=\lambda\sum_{k=0}^{n}P\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}Q\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$

$$=\lambda B_n(P)(X)+B_n(Q)(X)$$

Ainsi $B_n\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

- B_n est injective

On résout :

$$B_n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$$

Or on a démontré précédemment que $\left(P_{0,n}, \dots, P_{n,n}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi on a l'équivalence suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Leftrightarrow \forall k \in [\![0; n]\!], P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$$

Ainsi on a :

$$P \in \ker(B_n) \Longrightarrow \left\{0; \frac{1}{n}; \dots; 1\right\} \subset Rac(P)$$

Or on a :

$$Card\left(\left\{0; \frac{1}{n}; \dots; 1\right\}\right) = n + 1 \; et \; \deg(P) \leq n$$

Ainsi $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

On a donc $\ker(B_n) = \left\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$ donc B_n est un endomorphisme injectif, c'est donc un automorphisme.

b) On a :

$$\forall k \in [\![0; n]\!], \varphi_n\left(P_{k,n}\right)(X) = nXP_{k,n}(X) + X(1-X){P_{k,n}}'(X)$$

On distingue 3 cas.

__1er cas__ : $P_{0,n}(X) = (1-X)^n$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(P_{0,n}\right)(X) &= nX(1-X)^n - X(1-X)n(1-X)^{n-1} \\ &= 0_{\mathbb{R}_n[X]}\end{aligned}$$

__2ième cas__ : $P_{n,n}(X) = X^n$

On a :

$$\varphi_n\left(P_{n,n}\right)(X) = nX^{n+1} + X(1-X)nX^{n-1} = nX^n$$

__3ième cas__ : $k \in [\![1; n]\!]$

On a :

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(P_{k,n}\right)(X) &= \binom{n}{k}\left(nX^{k+1}(1-X)^{n-k} + X(1-X)kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - X(1-X)(n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right) \\ &= \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k}(nX + k(1-X) - (n-k)X) \\ &= \boldsymbol{k\binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} = kP_{k,n}(X)}\end{aligned}$$

c) On a une matrice diagonale :

$$\boldsymbol{mat_{\mathcal{F}_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & (0) \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & n \end{pmatrix} = A_n}$$

d) On a :

$$\boldsymbol{\det(\varphi_n) = \det(A_n) = 0 \times 1 \times \dots \times n = 0}$$

Ainsi φ_n n'est pas un automorphisme. En effet on peut juste voir que $X^n \in \ker(\varphi_n)$.

__Partie B : Le théorème de Weierstrass__

1) a) $f \in \mathcal{C}^1([0; 1])$ donc f' est continue sur un segment, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi K existe.

b) C'est l'inégalité des accroissements finis :

$$\boldsymbol{\forall (x, y) \in [0; 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in [0;1]} |f'(x)|\,|x - y| \leq K|x - y|}$$

Ainsi f est K −lipschitizienne.

2) a) On a d'après le binôme de Newton :

$$\forall x \in [0;1], \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$$

Ainsi on a :

$$\forall x \in [0;1], \mathcal{B}_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

b) On a :

$$\forall x \in [0;1], |\mathcal{B}_n(f)(x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\boldsymbol{\leq K \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

3) a) On sait que :

$$\mathbb{E}[|Y|]^2 = \mathbb{E}[|Y|^2] - Var(|Y|) \leq \mathbb{E}[|Y|^2] \; car \; var(Y) \geq 0$$

De plus on a :

$$|Y|^2 = Y^2 \; car \; Y(\Omega) \subset \mathbb{R}$$

Ainsi on a :

$$\mathbb{E}[|Y|]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2]$$

On a donc bien :

$$\mathbb{E}[|Y|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

On en déduit donc que :

$$\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

Or on sait que :

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$$

Ainsi on en déduit que :

$$\boldsymbol{\mathbb{E}[|Y|] \leq \sqrt{Var(Y) + \mathbb{E}[Y]^2}}$$

b) C'est le **théorème de transfert**.

c) On pose :

$$Z = \left|\frac{Y}{n} - x\right|$$

D'après la question précédente on a :

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - x\right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sqrt{Var\left(\frac{Y}{n} - x\right) + \mathbb{E}\left[\frac{Y}{n} - x\right]^2}$$

Or on a :

$$Var\left(\frac{Y}{n} - x\right) = \frac{1}{n^2} Var(Y) = \frac{nx(1-x)}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}$$

Enfin on a :

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y}{n} - x\right] = \frac{nx}{n} - x = 0$$

On en déduit donc que :

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}$$

d) On étudie la fonction $x\mapsto x(1-x)$ sur $[0;1]$. Son minimum est 0 et son maximum est $\frac{1}{4}$. Ainsi on a :

$$\forall x\in[0;1], x(1-x)\leq\frac{1}{4}$$

Ainsi on a :

$$|\mathcal{B}_n(f)(x)-f(x)|\leq K\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq K\sqrt{\frac{1}{4n}}\leq\frac{K}{2\sqrt{n}}$$

e) Soit $\epsilon>0$ et $f\in\mathcal{C}^1([0;1])$. On sait que :

$$\lim_{n}\frac{K}{2\sqrt{n}}=0$$

Ainsi :

$$\exists n_0>0\ tel\ que\ \forall n\geq n_0, \frac{K}{2\sqrt{n}}\leq\epsilon$$

On pose alors :

$$P_f(X)=\mathcal{B}_{n_0}(f)(X)$$

On a alors :

$$\forall x\in[0;1], \left|P_f(x)-f(x)\right|\leq\frac{K}{2\sqrt{n_0}}\leq\epsilon$$

Ainsi on a :

$$\forall f\in\mathcal{C}^0([0,1]),\forall\epsilon>0,\exists P_f\in\mathbb{R}[X]\ tel\ que\ \sup_{x\in[0,1]}\left|f(x)-P_f(x)\right|\leq\epsilon$$

4) On sait que cos est 1- lipchitzienne, donc on cherche :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leq 10^{-2}\Longrightarrow n\geq 2500$$

Ainsi on peut poser :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{2500}\cos\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$

Partie C : Une autre démonstration des sommes de Riemann

1) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0;1], |\mathcal{B}_n(f)(x)-f(x)|\leq\frac{K}{2\sqrt{n}}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\|B_n(f)-f\|_\infty=0$$

Ainsi on a :

$$\forall\epsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0, \|B_n(f)-f\|_\infty\leq\epsilon$$

Ainsi on a :

$$\forall n\geq n_0,\left|\int_0^1 B_n(f)(x)dx-\int_0^1 f(t)dt\right|=\left|\int_0^1 B_n(f)(x)-f(x)dx\right|\leq\int_0^1|B_n(f)(x)-f(x)|dx$$

$$\leq\int_0^1\|B_n(f)-f\|_\infty dx\leq\int_0^1\epsilon dx\leq\epsilon$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B_n(f)(x)dx=\int_0^1 f(t)dt$$

2) a) On effectue une intégration par partie :

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}(1-x)^{n-k}\right]_0^1}_{=0} + \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1}(n-k)\,(1-x)^{n-k-1}dx$$

$$= \boldsymbol{\frac{(n-k)}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}dx}$$

b) On a :

$$\int_0^1 B_n(f)(x)dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$$

$$= f(1)\int_0^1 x^n\,dx + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$$

$$= \frac{1}{n+1}f(1) + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} I(n,k) \text{ avec } I(n,k) = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$$

Or d'après la question précédente on a :

$$I(n,k) = \frac{(n-k)}{k+1}I(n-1;k+1)$$

$$= \frac{(n-k)}{k+1}\times\frac{n-k-1}{k+2}I(n-2,k+2)$$

$$\vdots$$

$$\text{en réitérant le procédé}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{(n-k)!\,k!}{n!}I(k,n)$$

$$= \frac{(n-k)!\,k!}{n!}\int_0^1 x^n(1-x)^0\,dx = \frac{1}{\binom{n}{k}}\times\frac{1}{n+1}$$

Ainsi on obtient :

$$\boldsymbol{\int_0^1 B_n(f)(x)dx = \frac{1}{n+1}f(1) + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} I(n,k) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

c) On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 B_n(f)(x)dx = \int_0^1 f(t)dt$$

Or on a :

$$\int_0^1 B_n(f)(x)dx = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On en déduit donc que :

$$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt}$$

d) On a :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1}f(1) + \frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Or d'après les sommes de Riemann on sait que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \to \int_0^1 f(t)dt$$

De plus on a :

$$\frac{1}{n+1} f(1) \to 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$$

Problème 3 : Interversion de limites

Dans tout ce problème on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$$

Le but de ce problème est de démontrer la convergence de la série suivante :

$$\sum_{k\geq 2} (\zeta(k) - 1)$$

Nous allons même en déterminer sa valeur. Pour se faire nous allons intervertir deux sommes infinies. Cependant il faut faire très attention car si l'on peut toujours intervertir deux sommes finies, on ne peut pas toujours le faire avec des sommes infinies. C'est ce que l'on appelle en mathématiques les problèmes d'interversion (de sommes, de limites, de sommes et d'intégrales…).

Partie A : Interversion de limites

1) On pose :

$$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, u(n,m) = \left\lfloor 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right\rfloor \text{ où } \lfloor x \rfloor \textit{ désigne la partie entière de } x$$

a) Déterminer :

$$u(2,3) \text{ et } u(3,2)$$

b) Démontrer que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{m\to+\infty} u(n,m) = 0 \\ \lim\limits_{m\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} u(n,m) = 1 \end{cases}$$

Ainsi on ne peut pas toujours intervertir deux limites. C'est la même chose pour les sommes infinies.

2) On pose :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ -1 \text{ si } j = i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

b) En déduire la valeur de :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$$

c) Démontrer que :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} \neq \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$$

Partie B : Aucun problème pour nous ici !

Dans cette partie nous souhaitons montrer que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$$

1) a) Rappeler pourquoi le nombre $\zeta(k)-1$ existe.

b) A l'aide d'une comparaison série-intégrale, démontrer que :

$$\zeta(k)-1\leq\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k-1}(k-1)}$$

c) En déduire que la série suivante est convergente :

$$\sum_{k\geq2}(\zeta(k)-1)$$

2) On pose :

$$\forall n\geq2, u_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$$

a) Démontrer que :

$$\forall n\geq2, u_n=\frac{1}{n(n-1)}$$

b) En déduire que (Σu_n) est convergente et calculer sa valeur.

Ainsi il existe deux nombres $\ell\ et\ \ell'$ réels positifs tels que :

$$\ell=\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\ et\ \ell'=\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{n^k}$$

3) On pose :

$$\forall N\geq2, v_N=\sum_{n=2}^{N}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{n^k}=\sum_{k=2}^{N}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^k}\ (car\ la\ somme\ est\ finie)$$

a) Montrer que :

$$\ell-v_N=\sum_{k=2}^{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}-\sum_{k=N+1}^{+\infty}(\zeta(k)-1)$$

b) Montrer que :

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=N+1}^{+\infty}(\zeta(k)-1)=0$$

c) Montrer que :

$$\sum_{k=2}^{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{n^k}$$

d) En déduire que $\ell=\ell'=1$.

Partie A : Interversion de limites

1) a) On a :

$$u(2,3)=\left\lfloor1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right\rfloor=0$$

$$u(3,2)=\left\lfloor1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right\rfloor=1$$

b) On a :

$$\boldsymbol{\forall m\in\mathbb{N}^*,\forall n>m, u(m,n)=1\Longrightarrow\lim_{n}u(m,n)=1\ donc\ \lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}u(n,m)=1}$$

De même on a :

$$\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall m>n, u(m,n)=0\Longrightarrow\lim_{m}u(m,n)=0\ donc\ \lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}u(n,m)=0}$$

2) a) On a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}a_{0,j}=a_{0,0}+\sum_{j=1}^{+\infty}\underbrace{a_{0,j}}_{=0}=1$$

De même on a :

$$\forall i \geq 1, \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{i-2} \underbrace{a_{i,j}}_{=0} + a_{i,i-1} + a_{i,i+1} + \sum_{j=i+2}^{+\infty} \underbrace{a_{i,j}}_{=0} = -1 + 1 = 0$$

b) On a donc :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} = 1$$

c) De même on a :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{j-1} \underbrace{a_{i,j}}_{=0} + a_{j,j} + a_{j+1,j} + \sum_{j=i+2}^{+\infty} \underbrace{a_{i,j}}_{=0} = -1 + 1 = 0$$

On a donc :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} = 0$$

Ainsi on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j} \neq \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$$

Partie B : Aucun problème pour nous ici !

1) a) C'est le critère de Riemann car $k \geq 2$. Donc :

$$\left(\sum_{k\geq 1} \frac{1}{n^k}\right) \text{ converge}$$

Ainsi $\zeta(k) - 1$ existe.

b) On sait que :

$$\forall k \geq 2, t \mapsto \frac{1}{t^k} \text{ est décroissante}$$

On en déduit donc que :

$$\forall k \geq 2, \forall N \geq 2, \forall n \in [\![2; N]\!], \frac{1}{n^k} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^k} dt$$

Ainsi on a :

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{2^k} + \sum_{k=3}^{N} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{2^k} + \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^k} dt$$

Or on a :

$$\sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^k} dt = \int_{2}^{N} t^{-k} dt = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)}\left(1 - \frac{1}{N^{k-1}}\right) \leq \frac{1}{2^{k-1}(k-1)}$$

c) On sait que :

$$\left(\sum_{k\geq 2} \frac{1}{2^k}\right) \text{ converge car } \frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

De plus on sait que :

$$\forall k \geq 2, \frac{1}{2^{k-1}(k-1)} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ et } \left(\sum_{k\geq 2} \frac{1}{2^{k-1}}\right) \text{ converge}$$

Ainsi on a :

$$\left(\sum_{k\geq 2} (\zeta(k) - 1)\right) \textbf{ converge}$$

2) a) On a :

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^k} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

b) On a :

$$\frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2} \; et \; \left(\sum \frac{1}{n^2}\right) \; converge \; d'après le critère de Riemann$$

Ainsi on a :

$$(\Sigma u_n) \text{ est convergente}$$

De plus on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{N} \to 1$$

Ainsi on a :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

3) a) On a :

$$\begin{aligned}
\ell - v_N &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} - \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} - \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} - \sum_{k=N+1}^{+\infty} (\zeta(k) - 1)
\end{aligned}$$

b) On sait que :

$$\left(\sum_{k\geq 2} (\zeta(k) - 1)\right) \; converge$$

Ainsi **la série des restes partielles convergent vers 0** :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=N+1}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = 0$$

c) On a :

$$\sum_{k=2}^{N} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=2}^{N} \lim_{K\to+\infty} \sum_{n=N+1}^{K} \frac{1}{n^k} = \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} \sum_{n=N+1}^{K} \frac{1}{n^k} \; (car\ la\ première\ somme\ est\ finie)$$

$$= \sum_{n=N+1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{n^k}$$

d) On a alors :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \to 0$$

Car la série (Σu_n) converge donc la série des restes partielles tend vers 0.
Ainsi on a :

$$\ell - v_N \to 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{N} v_N = \ell$$

De même pour les mêmes raisons on montre que :

$$v_N \to \ell'$$

On en déduit donc que :

$$\ell = \ell'$$

Or on a démontré précédemment que :

$$\ell' = 1$$

On a donc :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = 1$$