

TD 1 : Inégalité dans $\mathbb{R}$

Partie A : Résolution d'inégalité

Exercice A1 : Résoudre les inéquations suivantes :

$$a) \frac{x^2 + x - 30}{x + 1} \geq 0 \quad b) \frac{x + 1}{x - 2} \leq \frac{2}{x + 2}$$

Exercice A.2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$a) x - 1 = \sqrt{x + 2} \quad b) \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3} < 0 \quad c) \sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 2} = 1$$
$$d) \frac{1}{x} - \frac{1}{2x - 1} < \frac{1}{4x^2}$$

Exercice A3 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$1) \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x + 1|} = 1 \quad 2) \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x + 1|} \geq 1 \quad 3) x|x - 1| < |x|(x - 1)$$
$$4) \left| x + \frac{1}{x} \right| > 3 \quad 5) |x + 4| \leq |2x + 1| \quad 6) \left| \frac{x - 1}{x + 3} \right| \leq 2$$

Exercice A.4 : Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 2| \leq 1$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $2 \leq y \leq 5$. Encadrer $x+y$, xy et $\frac{x}{y}$.

Exercice A.5 : On a :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Encadrer $x+y$, xy et $\frac{x}{y}$.

Partie B : Démonstration d'inégalité

Exercice B.1 : Démontrer les inégalités suivantes :

$$a) \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad b) \forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Exercice B.2 : Démontrer que pour tout x, y réels strictement positifs :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Exercice B.3 : Démontrer que pour tout x et y réels strictement positifs :

$$\frac{xy}{x + y} \leq \frac{x + y}{4}$$

Exercice B.4 : Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 2x + 2} \leq 3$$

Exercice B.5 : Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Exercice B.6 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n$. On veut démontrer que :

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2$$

1) Démontrer que :

$$\forall x > 0, x + \frac{1}{x} \geq 2$$

2) En déduire par récurrence que :

$$(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{*+})^n, \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \geq n^2$$

Exercice B.7 : On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{|x|}{1 + |x|} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x + y) \leq g(x) + g(y)$$