

Chapitre 2 : Généralité sur les fonctions

Dans tout ce chapitre I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

I) Propriétés d'une fonction

a) Ensemble de définition

Définition (ensemble de définition) : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de A dans $\mathbb{R}$. On appelle domaine de définition de f l'ensemble :

$$\mathcal{D}_f = \{x \in A \text{ tels que } f(x) \text{ existe}\}$$

Si $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$ on dit que :

- y est l'image de x par f
- x est un antécédent de y par f .

Remarque : Pour définir une fonction, il faut donner son ensemble de définition. Usuellement nous avons trois façons de définir une fonction.

Notation 1 :

$$f: x \mapsto f(x) \text{ pour } x \in I$$

Notation 2 :

$$\forall x \in I, f(x) = \dots$$

Notation 3 :

$$f: \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Nous verrons cette année qu'il est parfois nécessaire de préciser « l'ensemble d'arrivée » de la fonction, même au sens large ! Cela ne sera pas nécessairement un réel, un complexe, mais un polynôme, une suite, un couple, une matrice... La notation 3 prend tout son sens lorsque nous n'arrivons pas dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Exemple I.a.1 : Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6} \quad g: x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

Remarque (lien avec les autres disciplines scientifiques) : En mathématiques nous avons un cadre général, ainsi une fonction est très souvent notée f (comme fonction) et la variable x (depuis Descartes !). Cependant il est parfois plus judicieux d'utiliser d'autres notations usuelles comme par exemple :

_ $x(t)$ et $y(t)$ pour l'évolution des coordonnées d'un point en fonction du temps (comme pour les équations horaires !).

_ $[H_3O^+](t)$ pour la concentration en H_3O^+ en fonction du temps.

_ $P_{H_2}(n)$ pour la pression de H_2 en fonction de la quantité de matière.

ATTENTION : Il arrive qu'une fonction puisse être définie sur un ensemble « plus large », mais par exemple en physique (mais aussi en mathématiques !), il est souvent inutile de définir la fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier (en physique par exemple la variable t temporelle n'a de sens que si $t \geq 0$, de même en mathématiques pour démontrer une inégalité par exemple).

Exemple I.a.2 : Démontrer que :

$$\forall x \geq 0, \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$$

b) Opération sur les fonctions

Définition (Somme, produit et quotient) : Soient f et g deux fonctions définies sur I .

(1) La somme de f et g est la fonction notée $(f + g)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(2) Le produit de f et g est la fonction notée $(f \times g)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

(3) Si g ne s'annule pas sur I ($\forall x \in I, g(x) \neq 0$), le quotient de f et g est la fonction notée $\left(\frac{f}{g}\right)$ définie pour tout $x \in I$ par :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Exemple : On peut donc écrire que :

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

Définition (composée de fonctions) : Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que $f(I) \subset J$.

On appelle **fonction composée** la fonction notée $(g \circ f)$ de I dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exemple I.b.1 : On pose :

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble de définition puis la fonction : $h_1 = (g \circ f)$ et $h_2 = (f \circ g)$

II) Graphe d'une fonction

a) Définition

Définition (courbe représentative) : On appelle courbe représentative de f , noté $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points $M(x; f(x))$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$: $\mathcal{C}_f = \{(x; f(x)); x \in I\}$

Propriété II.a.1 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de :

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- $x \mapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- $x \mapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par une symétrie d'axe $x = \frac{a}{2}$.
- $x \mapsto f(ax), a \neq 0$, se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $\frac{1}{a}$.
- $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a .

Exemple II.a.2 : Voir Annexe I.2.1

b) Parité et périodicité

Définition :

- Une fonction f est **paire** lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = f(x)$$
- Une fonction f est **impaire** lorsque le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 0 et que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, f(-x) = -f(x)$$
- Une fonction f est T -périodique ($T > 0$) si :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x + T \in \mathcal{D}_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

Exemple II.b.1 : Déterminer trois fonctions paires, trois impaires et trois périodiques de périodes différentes.

Propriété II.b.2 (Caractérisation graphique des fonctions paires, impaires et périodiques) :

- (1) Une fonction f est paire si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- (2) Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- (3) Une fonction f est T-périodique si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{z}$.

Remarque : Lorsqu'une fonction est paire ou impaire, on peut restreindre son étude sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ puis on en déduit la courbe par symétrie. De même pour les fonctions périodiques où l'on peut restreindre son étude sur un intervalle de longueur T.

Exemple II.b.3 : On pose :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) + 1} \end{cases}$$

Déterminer son domaine d'étude minimale pour connaître l'allure de la courbe.

c) Graphe d'une bijection

Définition (bijection) : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: x \mapsto f(x)$ une fonction définie sur I . On note J l'ensemble des images prises par $f(x)$: $J = \{f(x) \text{ tel que } x \in I\}$ (on note souvent $J = f(I) = \text{Im}(f)$).

On dit que f est bijective de I dans J si et seulement si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$:

$$\forall y \in J, \exists! x \in I, f(x) = y$$

On dit alors que f définit une bijection de I dans J .

Remarque : Pour démontrer qu'une fonction d'une variable réelle est bijective, on utilise souvent le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires !).

Exemple II.c.1 : On pose :

$$f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Démontrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un ensemble à déterminer.

Exemple II.c.2 : On pose :

$$f: x \mapsto e^x + e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Montrer que f n'est pas bijective sur $\mathbb{R}$.

Définition (fonction réciproque) : Lorsque f est bijective, on peut alors définir sa réciproque, notée f^{-1} , appelé **bijection réciproque** de f et définie de J dans I par :

$$f^{-1}: \begin{cases} J \rightarrow I \\ y \mapsto f^{-1}(y) = \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{cases}$$

Remarque : Pour déterminer f^{-1} , on résout souvent l'équation $y = f(x)$ où y appartient à l'ensemble des images de f .

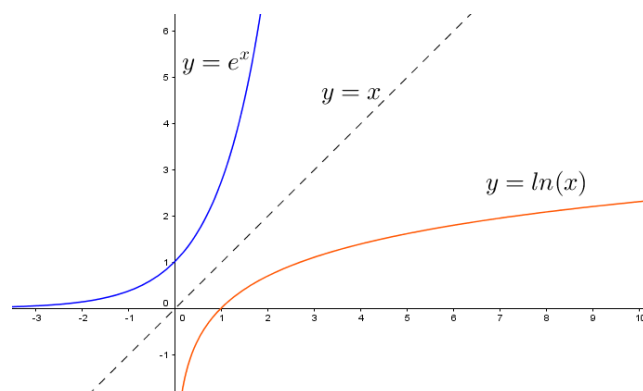
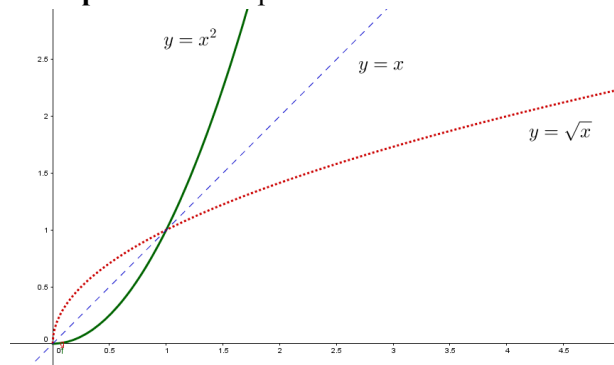
Exemple II.c.3 : On pose :

$$f: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Déterminer la bijection réciproque de f , noté f^{-1} .

Propriété II.c.2 : Soit f une fonction bijective de I dans J intervalle de $\mathbb{R}$. Alors la courbe représentative de f^{-1} est symétrique par rapport à la courbe représentative de f par rapport à la droite $y = x$.

Exemple II.c.3 : On pose :



d) Graphe d'une fonction majorée, minorée ou bornée

Définition : On dit qu'une fonction est

- Majorée par M si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$$

- Minorée par m si

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq m$$

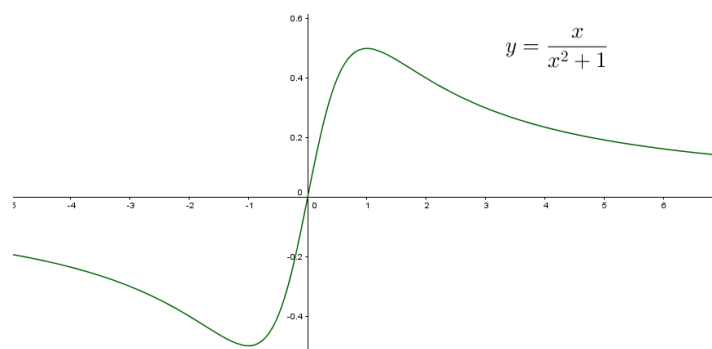
- Bornée par m et M si :

$$\exists (M; m) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$$

Exemple II.d.1 : La fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1} \end{cases}$$

Est bornée sur $\mathbb{R}$.

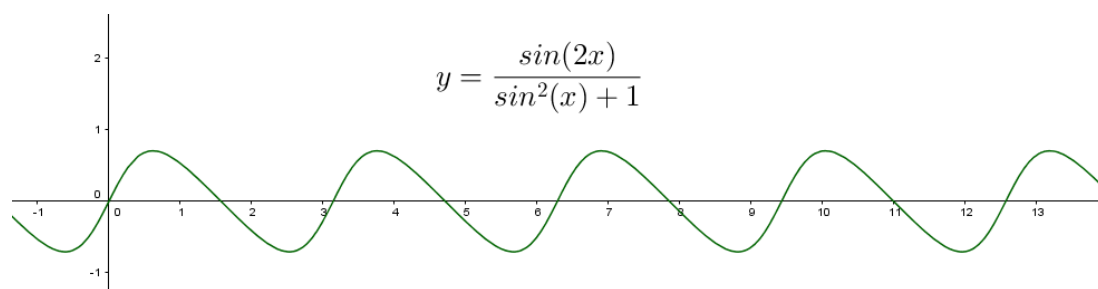


Propriété II.d.2 : Pour démontrer qu'une fonction est bornée, il suffit de démontrer que $|f|$ est majorée.

Application II.d.3 : Montrer que la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x) + 1} \end{cases}$$

Est bornée sur $\mathbb{R}$.



III) Limite d'une fonction et conséquence sur le graphe

a) Opération sur les limites

Remarque : Les définitions mathématiques des limites d'une fonction sera abordée dans un chapitre ultérieur. On se base ici sur une approche intuitive et de « bon sens » abordée en terminale.

(1) soient $l, l' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

(2) soient $l, l' \in \mathbb{R}$,

si f a pour limite	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors fg a pour limite	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

(3) soient $l, l' \in \mathbb{R}$, $l' \neq 0$,

si f a pour limite	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
si g a pour limite	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Et dans le cas particulier où l' est nul,

si f a pour limite	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	0
si g a pour limite	0+	0-	0+	0-	0
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Application III.a.1 : Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + 3x - 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2 - \sqrt{4 - \frac{1}{x}}}$

b) Limites d'une composée

Propriété III.b.1 : Soient $(a, b, c) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^3$ et f et g deux fonctions pour lesquelles on suppose :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$$

Alors sous réserve d'existence, la fonction composée $g \circ f$ vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$$

Application III.b.2 : Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \times \ln(x)^2 + 3 \ln(x) - 7}{5 \ln(x)^2 + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$$

c) Théorème de comparaison et des gendarmes

Propriété III.c.1 : Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f, g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant b ou ouvert en b . On a alors :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty \\ \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$$

On a de même avec $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty \\ \forall x \in I, f(x) \geq g(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty$$

Application III.c.2 : Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin(x))$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\cos(x)^2 + 2} \right)$$

Propriété III.c.3 : Soient $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $L \in \mathbb{R}$ et f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I contenant b ou ouvert en b tels que l'on ait les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} h(x) = L \end{aligned}$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow b} g(x) = L$$

Application III.c.4 : Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

d) Asymptotes

Définition (ASYMPTOTE HORIZONTALE) : Soit f une fonction telle que : il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et avec :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$$

On dit alors que la courbe représentative de f , C_f , admet une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y = \ell$.

Exemple III.d.1 : On pose $\forall x \in \mathbb{R}$:

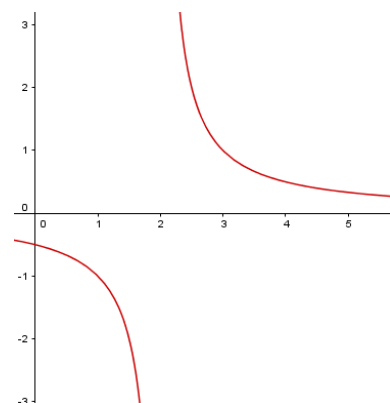
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

Définition (ASYMPTOTE VERTICALE) : Soit f une fonction telle que :

il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et avec :

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \pm\infty$$

On dit alors que la courbe représentative de f , C_f , admet une asymptote verticale en $\pm\infty$ d'équation $x = \ell$.



ATTENTION : On peut avoir une limite à gauche et une limite à droite différente.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \left(\frac{1}{x-2} \right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \left(\frac{1}{x-2} \right) = -\infty$$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exemple III.d.2 : On pose $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.